ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 29

А. Н. КОСТОВСКИЙ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ ОДНИМ ЦИРКУЛЕМ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1984

22.151.0
К 72
УДК 513.0

Костовский А. Н.

К 72 Геометрические построения одним циркулем.— 2-е изд., перераб.— М.: Наука, 1984.— 80 с.— (Популярные лекции по математике).— 10 к.

Брошюра посвящена описанию и исследованию геометрических построений с помощью одного лишь циркуля; написана она на основе лекций, которые автор в течение ряда лет читал для школьников, принимавших участие в математических олимпиадах в г. Львове. Книжка представляет интерес для преподавателей математики и учащихся старших классов средней школы.

К $\frac{1702040000-007}{053(02)-84}$ 57-83

ББК 22.151.0
513

К $\frac{1702040000-007}{053(02)-84}$ 57-83

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1984, с изменениями

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 4
Введение 5

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ПОСТРОЕНИЯ ОДНИМ ТОЛЬКО ЦИРКУЛЕМ

§ 1. О возможности решения геометрических задач на построение одним только циркулем. Основная теорема . . . 7
§ 2. Решение геометрических задач на построение одним циркулем 16
§ 3. Инверсия и ее основные свойства 29
§ 4. Применение метода инверсии в геометрии циркуля . . 33

ГЛАВА ВТОРАЯ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ ОДНИМ ЦИРКУЛЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

§ 5. Построения одним циркулем с раствором ножек, ограниченным сверху 42
§ 6. Построения одним циркулем с раствором ножек, ограниченным снизу 58
§ 7. Построения одним циркулем с постоянным раствором ножек 61
§ 8. Построения одним циркулем с условием, что все окружности проходят через одну и ту же точку 63

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение I 72
Приложение II 73

Литература 75

ПРЕДИСЛОВИЕ

Автору настоящей брошюры неоднократно приходилось читать лекции по теории геометрических построений участникам математических олимпиад, которые, начиная с 1947 года, проводятся для учащихся средних школ г. Львова. Эти лекции послужили основой для написания первой главы данной работы.

Во второй главе излагаются исследования автора, касающиеся геометрических построений, выполняемых одним циркулем с ограниченным раствором ножек.

Предлагаемая брошюра написана для широкого круга читателей. Она должна помочь учителям и учащимся старших классов средней школы более подробно ознакомиться с геометрическими построениями, выполняемыми с помощью одного лишь циркуля. Эта работа может служить пособием для школьных математических кружков и использоваться при проведении математических олимпиад, а также факультативных занятий. Кроме того, ее могут использовать студенты физико-математических факультетов педагогических институтов и университетов, так как она, по нашему мнению, способствует расширению и углублению профессиональной подготовки.

Автор считает своим долгом выразить искреннюю признательность профессору А. С. Кованько, доцентам В. Ф. Рогаченко, И. Ф. Тесленко и опытному учителю-методисту Б. Г. Орачу, внимательно просмотревшим рукопись и давшим по ней ряд ценных советов.

ВВЕДЕНИЕ

Геометрические построения являются существенным фактором математического образования; они представляют собой мощное орудие геометрических исследований.

Традиционное ограничение орудий геометрических построений только циркулем и линейкой восходит к глубокой древности. Знаменитая геометрия Евклида (III век до нашей эры) была основана на геометрических построениях, выполняемых циркулем и линейкой; при этом циркуль и линейка рассматривались как равноправные инструменты; было совершенно безразлично, как выполнялись отдельные построения: с помощью циркуля и линейки, или с помощью одного циркуля, или одной линейки.

Уже давно было замечено, что циркуль является более точным, более совершенным инструментом, чем линейка, что некоторые построения можно выполнить одним циркулем без употребления линейки, например разделить окружность на шесть равных частей, построить точку, симметричную данной точке относительно данной прямой, и т. д. Было обращено внимание на тот факт, что при резьбе на тонких металлических пластинках, при разметке делительных кругов астрономических инструментов пользуются, как правило, одним только циркулем. Последнее, вероятно, и послужило толчком к исследованию геометрических построений, выполняемых одним лишь циркулем.

В 1797 году итальянский математик, профессор университета в Павии, Лоренцо Маскерони опубликовал большую работу «Геометрия циркуля», которая позже была переведена на французский и немецкий языки. В этой работе было доказано следующее предложение:

«Все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, могут быть точно решены и одним только циркулем».

Это утверждение было оригинальным способом с помощью инверсии доказано А. Адлером в 1890 году. Он также предложил общий метод решения геометрических задач на построение одним лишь циркулем. В 1928 году датский математик Гьельмслев нашел в книжном магазине Копенгагена книгу Г. Мора под названием «Датский Евклид», изданную в 1672 году в Амстердаме. В первой части этой книги дано полное решение проблемы Маскерони. Таким образом, задолго до Маскерони было показано, что все геометрические построения, выполнимые с помощью циркуля и линейки, могут быть выполнены с помощью одного только циркуля.

Раздел геометрии, изучающий геометрические построения одним циркулем, называют *геометрией циркуля.*

В 1833 году швейцарский геометр Якоб Штейнер опубликовал работу «Геометрические построения, производимые с помощью прямой линии и неподвижного круга», в которой наиболее полно исследовал построения одной линейкой. Основной результат этой работы можно сформулировать в виде предложения:

Каждая задача на построение, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена и одной линейкой, если в плоскости чертежа дана постоянная окружность и ее центр.

Таким образом, чтобы линейку сделать равносильной циркулю, достаточно однократное употребление циркуля.

Великий русский математик Н. И. Лобачевский в первой половине XIX века открыл новую геометрию, получившую впоследствии название неевклидовой геометрии, или геометрии Лобачевского. В последнее время, благодаря усилиям большого числа ученых, особенно советских, бурно развивается теория геометрических построений в плоскости Лобачевского.

А. С. Смогоржевский, В. Ф. Рогаченко, К. К. Мокрищев и другие математики в своих работах провели исследования построений в плоскости Лобачевского без помощи линейки, при этом была показана возможность построений, аналогичных построениям Маскерони в евклидовой плоскости.

Преобладание исследований по общим вопросам привело к оформлению в работах наших ученых достаточно полной и строгой теории геометрических построений в плоскости Лобачевского, едва ли намного уступающей в своей завершенности теории геометрических построений в евклидовой плоскости.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ПОСТРОЕНИЯ ОДНИМ ТОЛЬКО ЦИРКУЛЕМ

§ 1. О возможности решения геометрических задач на построение одним только циркулем. Основная теорема

В данном параграфе будет приведено доказательство основной теоремы геометрии циркуля, для чего необходимо предварительно рассмотреть решения некоторых задач на построение одним циркулем.

С помощью одного только циркуля мы не сможем, разумеется, начертить непрерывной прямой линии, заданной двумя точками; хотя мы покажем далее, как, пользуясь одним лишь циркулем, построить одну, две и вообще любое число точек, как угодно плотно расположенных на данной прямой *). Таким образом, построение прямой линии не покрывается полностью теорией Мора — Маскерони.

В геометрии циркуля прямая линия или отрезок определяется двумя точками, а не задается в виде непрерывной прямой линии (проведенной с помощью линейки). *Построение прямой линии считается оконченным, как только построены две любые ее точки.*

Введем обозначения:

(AB) — прямая линия, проходящая через две точки A и B;

$[AB]$ — отрезок AB;

$|AB|$ — расстояние между точками A и B;

(O, r) — окружность (или круг) с центром O и радиусом r;

$(A, |BC|)$ — окружность (или круг) с центром A и радиусом $r=|BC|$.

Условимся в дальнейшем фразу «Из точки O, как из центра, радиусом r проводим окружность (или чертим дугу)» для сокращения записывать так: «Проводим (описываем, или чертим) окружность (O, r)», а иногда еще короче: «Проводим (O, r)». Фразу «Отрезок AB, где $|AB|=a$» условимся считать равнозначной фразе

*) Оставаясь на практической точке зрения, нет основания считать прямую построенной, если построены некоторые ее точки.

«Отрезок a» и, в соответствии с этим, говорить, например, что отрезок CD в n раз больше отрезка AB, если $|CD|=n|AB|$.

Другие символы и обозначения школьного курса математики, используемые в данной работе, приведены в [14] и в Приложении I.

Задача 1. Построить точку, симметричную данной точке C относительно данной прямой AB.

Дано: (AB) и точка C. Построить: $C_1=S_{(AB)}(C)$ *).

Построение. Проводим окружности $(A, |AC|)$ и $(B, |BC|)$, которые пересекутся в точке C_1 (рис. 1). Точка C_1 — искомая.

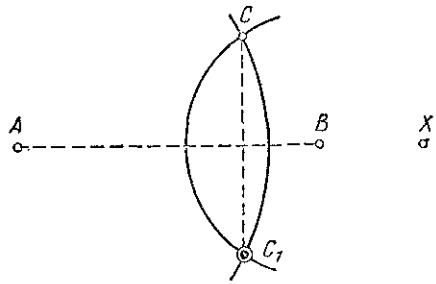

Рис. 1.

Если точка C лежит на прямой AB, то она сама себе симметрична (т. е. $C=S_{(AB)}(C)$).

Примечание. Чтобы определить, лежат ли три данные точки A, B и X на одной прямой линии, нужно вне прямой AB взять произвольную точку C и построить симметричную ей точку C_1. Очевидно, точка X лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда $|CX|=|C_1X|$.

Задача 2. Построить отрезок, в 2, 3, 4, ...и вообще в n раз больший данного отрезка AA_1 (n — любое натуральное число, т. е. $n \in \mathbf{N}$).

Дано: $|AA_1|=r$. Построить: $[AA_n]$, $|AA_n|=n|AA_1|$, где $n \in \mathbf{N}$.

Построение (1-й способ). Построение осуществляется постоянным раствором ножек циркуля, равным r. Проводим окружность (A_1, r) и определяем на ней точку A_2, диаметрально противоположную точке A (для чего последовательно проводим окружности (A, r), (B, r) и (C, r); в пересечении этих окружностей с

*) См. Приложение I.

окружностью (A_1, r) последовательно получим точки B, C и A_2). Отрезок $|AA_2|=2r$ (рис. 2).

Проводим затем окружность (A_2, r), которая пересечет окружность (C, r) в точке D. В пересечении ранее проведенной окружности (A_2, r) с (D, r) получим точку A_3. Отрезок $|AA_3|=3r$ и т. д.

Проделав приведенное построение n раз, построим отрезок $|AA_n|=nr$.

Справедливость построения следует из того, что циркуль с раствором, равным радиусу окружности, делит ее на шесть равных частей.

Построение (2-й способ). Берем вне прямой AA_1 произвольную точку B и проводим окружности $(A_1, |AB|)$ и (B, r), в пересечении которых получим точку C (рис. 3). Если теперь описать окружности (A_1, r) и $(C, |A_1B|)$, то они пересекутся в искомой точке A_2. Отрезок $|AA_2|=2r$. Проводим окружности (A_2, r)

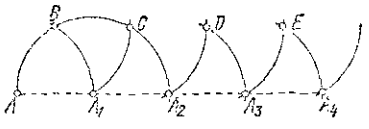

Рис. 2.

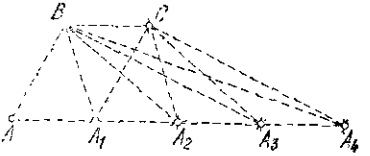

Рис. 3.

и $(C, |A_2B|)$ и обозначаем точку A_3 их пересечения. Здесь $|AA_3|=3r$ и т. д.

Справедливость построения немедленно следует из того, что фигуры $ABCA_1$, A_1BCA_2, A_2BCA_3, ... являются параллелограммами.

Примечание. Аналогично легко построить отрезки в 2, 4, 8, 16, ..., 2^k раз больше данного отрезка AA_1. Для этого проводим окружность (A_1, r) и находим точку A_2, диаметрально противоположную точке A ($|AA_2|=2r$); описываем окружность $(A_2, 2r)$ и строим точку A_4, диаметрально противоположную точке A ($|AA_4|=4r$). Диаметрально противоположная точка A_8 точке A на окружности $(A_4, 4r)$ определит $|AA_8|=8r$ и т. д. После k шагов получим $|AA_{2^k}|=2^kr$ *).

*) Нетрудно представить, как построить отрезки в m, m^2, m^3, ..., m^k раз больше данного, где $m=3, 4, 5, \ldots$ Например, при $m=5$ строим отрезок $|AA_5|=5|AA_1|$ (задача 2). Считаем отрезок AA_5 заданным и строим отрезок $|AA_{25}|=5|AA_5|=5^2|AA_1|$ (задача 2). Строим затем отрезок $|AA_{125}|=5|AA_{25}|=5^3|AA_1|$ и т. д.

Задача 3. Построить отрезок, четвертый пропорциональный к трем данным отрезкам a, b, c.

Дано: a, b, c — отрезки. Построить отрезок x такой, чтобы $a:b=c:x$.

Построение (1-й способ). Берем произвольную точку O и проводим окружности (O, a) и (O, b). Из произвольной точки A на окружности (O, a) описываем (A, c) и отмечаем точку B пересечения ее с окружностью (O, a). Если теперь провести две окружности (A, d) и (B, d) произвольного радиуса $d>|a-b|$, пересекающие (O, b) в точках A_1 и B_1, то отрезок $x=|A_1B_1|$ — искомый (рис. 4).

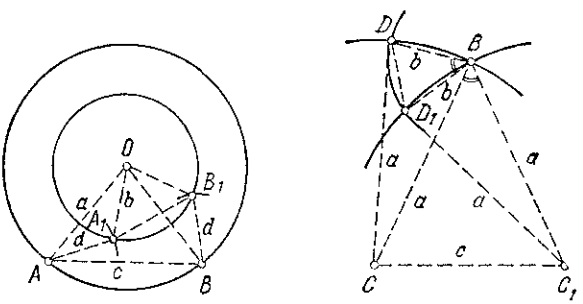

Рис. 4.

Доказательство: $\triangle AOA_1\cong\triangle BOB_1$ (по трем сторонам), поэтому $\widehat{AOA_1}=\widehat{BOB_1}$ и $\widehat{AOB}=\widehat{A_1OB_1}$. Равнобедренные треугольники AOB и A_1OB_1 подобны, следовательно,

$$a:b=c:|A_1B_1|.$$

Приведенное построение возможно, если $c<2a$. При $c\geqslant 2a$ и $b<2a$ строим отрезок, четвертый пропорциональный к отрезкам a, c и b; в противном случае ($c\geqslant 2a$ и $b\geqslant 2a$) сначала строим отрезок na (задача 2), при этом n берем таким, чтобы $c<2na$*) (или $b<2na$). Строим отрезок y, четвертый пропорциональный к отрезкам na, b и c. Если теперь построить отрезок $x=ny$

*) Отрезок $2na>c$ находим следующим способом. Строим отрезок $a_1=2a$ (задача 2). Из произвольной точки O_1 плоскости описываем окружность (O_1, c) и в произвольном направлении откладываем отрезки $|O_1A_1|=a_1$, $|O_1A_2|=2a_1$, $|O_1A_3|=3a_1$ и т. д. (задача 2): после конечного числа шагов придем к точке A_n, которая будет лежать вне (O_1, c). Очевидно, $|O_1A_n|=na_1=2na>c$.

(задача 2), то получим четвертый пропорциональный к отрезкам a, b и c.

Действительно,

$$na : b = c : y \quad \text{или} \quad a : b = c : ny.$$

Построение (2-й способ). Проводим окружности (C, a) и (C_1, a), где точки C и C_1 — концы отрезка c. В пересечении получим точку B (рис. 4). Окружность (B, b) пересечет окружности (C, a) и (C_1, a) в точках D и D_1. Отрезок DD_1 — искомый.

Доказательство. Равнобедренные треугольники C_1BD_1 и BCD конгруэнтны, поэтому $\overset{\frown}{CBD} = \overset{\frown}{C_1BD_1}$. Отсюда следует, что $\overset{\frown}{CBC_1} = \overset{\frown}{DBD_1}$. Из подобия равнобедренных треугольников CBC_1 и DBD_1 можем записать:

$$a : b = c : |DD_1|.$$

В случае $c \geqslant 2a$ и $b \geqslant 2a$, как и в первом способе построения, находим отрезок na таким, чтобы $2na > c$ и $2na > b$, затем строим четвертый пропорциональный y к отрезкам na, b и c. Отрезок ny — искомый.

Задача 4. Разделить дугу AB окружности (O, r) пополам.

Можно предположить, что центр O окружности известен, ниже (см. задачу 13) будет показано, как построить центр окружности (или дуги), пользуясь при этом одним только циркулем.

Построение. Полагая $a = |AB|$, проводим окружности (O, a), (A, r) и (B, r); в пересечении получим точки C и D (рис. 5). В пересечении окружностей $(C, |CB|)$ и $(D, |AD|)$ получим точку E. Если теперь начертить окружности $(C, |OE|)$ и $(D, |OE|)$, то в пересечении их получим точки X и X_1. Точка X делит пополам дугу AB, точка X_1 делит пополам дугу, дополняющую первую до полной окружности. (В том случае, когда окружность (O, r) начерчена, из двух окружностей $(C, |OE|)$ и $(D, |OE|)$ можно опи-

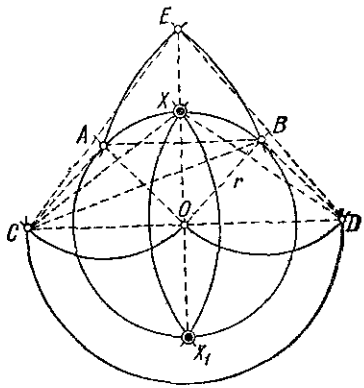

Рис. 5.

сывать только одиу, которая в пересечении с окружностью (O, r) определнт точки X и X_1.)

Доказательство. Фигуры $ABOC$ и $ABDO$ являются параллелограммами, поэтому точки C, O и D лежат на одной прямой ($[CO] \parallel [AB]$, $[OD] \parallel [AB]$). Из равнобедренных треугольнпков CED и CXD следует, что $\angle COE = \angle COX = 90°$. Итак, отрезок OX перпендикулярен к хорде AB; следовательно, для доказательства того, что точка X делит дугу AB пополам, достаточно покаВать, что $|OX| = r$.

Из параллелограмма $ABOC$ следует, что

$$|AO|^2 + |BC|^2 = 2|OB|^2 + 2|AB|^2$$

или

$$r^2 + |BC|^2 = 2r^2 + 2a^2,$$

так что

$$|BC|^2 = 2a^2 + r^2.$$

Из прямоугольного треугольиика COE можем записаты

$$|CE|^2 = |BC|^2 = |OC|^2 + |OE|^2,$$

откуда

$$2a^2 + r^2 = a^2 + |OE|^2$$

и

$$|OE|^2 = a^2 + r^2.$$

Наконец, из прямоугольного треугольнпка COX получим

$$|DX| = \sqrt{|CX|^2 - |OC|^2} = \sqrt{|OE|^2 - |OC|^2} = \sqrt{a^2 + r^2 - a^2} = r.$$

Приведенное построение остается справедливым и в случае, когда заданная дуга AB является полуокружностью ($\overset{\frown}{AB} = 180°$). В этом случае точки A и B будут лежать на отрезке CD, а окружности (A, r) и (B, r) будут касаться окружности (O, a) соответственно в точках C и D. Из-за несовершенства чертежных ииструментов (циркуля) установить точное расположение этих точек C и D достаточио трудно. В этом случае ($\overset{\frown}{AB} = 180°$) следует делить пополам дугу A_1B_1 ($\overset{\frown}{A_1B_1} \neq 180°$), такую, что $\overset{\frown}{AA_1} = \overset{\frown}{BB_1} > 0$ и $\overset{\frown}{AA_1} + \overset{\frown}{A_1B_1} + \overset{\frown}{B_1B} = \overset{\frown}{AB}$. Очевидио, что точка, делящая пополам дугу A_1B_1, будет делить пополам и дугу AB.

Как мы уже указывали, в геометрии циркуля прямую линию принято считать построенной как только определены две ее точки. В дальнейшем изложении (задачи 22, 23, 24 и др.) нам необходимо будет с помощью одного циркуля построить одну, две и вообще любое число точек данной прямой. Это построение можно выполнить следующим образом.

Задача 5. На прямой, заданной точками A и B, построить одну или несколько точек.

Дано: (AB). Построить: $X \in (AB)$, $X_1 \in (AB)$, ...

Построение. Берем вне прямой AB произвольную точку C (рис. 6) и строим относительно прямой AB симметричную ей точку C_1 (задача 1). Произвольным радиусом r проводим окружности (C, r) и (C_1, r), в пересечении которых получим точки X и X_1, лежащие на данной прямой AB. Изменяя величину радиуса r, можно построить сколько угодно точек данной прямой: X', X'_1 и т. д.

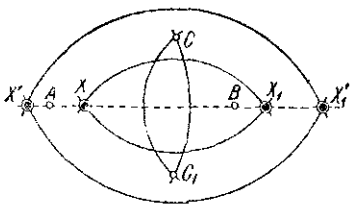

Рис. 6.

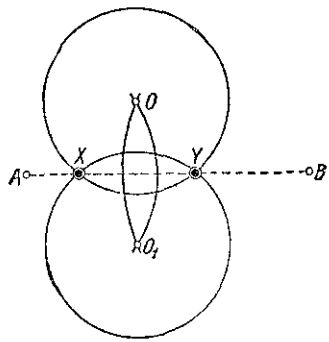

Рис. 7.

Доказательство. Точка C_1 симметрична точке C, поэтому прямая AB проходит через середину отрезка CC_1 и $(AB) \perp [CC_1]$, поэтому прямая AB является множеством всех точек, равноотстоящих от точек C и C_1. В силу построения $|CX| = |C_1X| = r$ и $|CX_1| = |C_1X_1| = r$, следовательно, $X \in (AB)$ и $X_1 \in (AB)$.

Задача 6. Построить точки пересечения окружности (O, r) и прямой, заданной двумя точками A и B.

Дано: (O, r) и (AB). Построить: $\{X; Y\} = (O, r) \cap (AB)$.

Построение в случае, когда центр O не лежит на данной прямой AB*) (рис. 7).

*) При помощи одного циркуля легко проверить, лежат ли данные три точки на одной прямой или нет (см. примечание к задаче 1).

Строим точку O_1, симметричную центру O данной окружности относительно прямой AB (задача 1). Проводим окружность (O_1, r), которая пересечет данную окружность в искомых точках X и Y.

Доказательство. В предыдущей задаче было показано, что точки X и Y лежат на прямой AB, однако эти точки принадлежат и заданной окружности (O, r), следовательно, $\{X; Y\} = (O, r) \cap (AB)$.

Построение в случае, когда центр O данной окружности лежит на прямой AB (рис. 8).

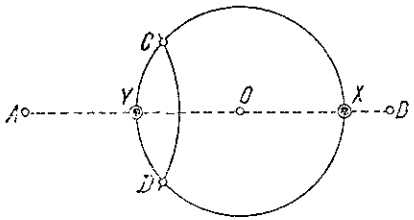

Рис. 8.

Произвольным радиусом d проводим окружность (A, d) так, чтобы она пересекалась с данной окружностью в двух точках C и D. Делим дуги CD данной окружности (O, r) пополам (задача 4). Точки X и Y — искомые.

Примечание. Если нам заданы два отрезка a и r, где $a = |AO|$, то описываем окружность (O, r), и, повторяя приведенное построение, мы получим сумму и разность длин данных отрезков:

$|AX| = |AO| + |OX| = a + r$ и $|AY| = |AO| - |OX| = a - r$.

Задача 7. Построить точку пересечения двух прямых AB и CD, каждая из которых задана двумя точками.

Дано: (AB) и (CD). Построить: точку $X = (AB) \cap (CD)$.

Построение. Строим точки C_1 и D_1, симметричные соответственно точкам C и D относительно данной прямой AB (рис. 9). Проводим окружности $(D_1, |CC_1|)$ и $(C, |CD|)$ и обозначаем через E точку их пересечения. Строим отрезок x, четвертый пропорциональный к отрезкам DE, DD_1 и CD (задача 3). В пересечении окружностей (D, x) и (D_1, x) получим искомую точку X.

Доказательство. Так как точка C_1 симметрична точке C, а точка D_1 симметрична точке D, то, очевидно, мы найдем точку пересечения данных прямых, если построим точку пересечения прямых CD и C_1D_1.

Фигура CC_1D_1E — параллелограмм, следовательно точки D, D_1 и E лежат на одной прямой ($(DE)\parallel(CC_1)$ $(DD_1)\parallel(CC_1)$). Треугольники CDE и XDD_1 подобны, поэтому

$$|DE| : |DD_1| = |CE| : |D_1X|,$$

но

$$|CE| = |CD| = |C_1D_1|.$$

Отрезок $x = |D_1X|$ является четвертым пропорциональным к отрезкам DE, DD_1 и CD.

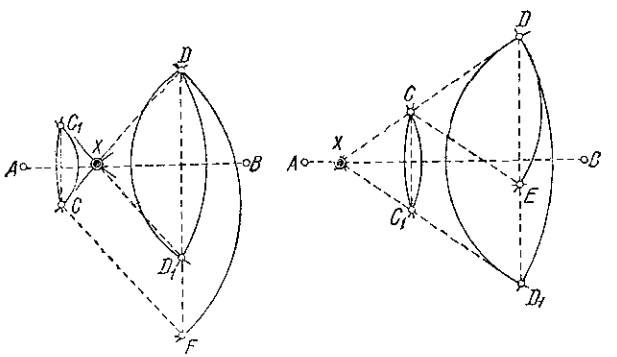

Рис. 9.

Примечание. Заданные прямые AB и CD параллельны тогда и только тогда, когда $|CC_1| = |DD_1|$, где точки C_1 и D_1 симметричны соответственно C и D относительно прямой AB.

* * *

Теперь мы сможем показать справедливость основной теоремы геометрии циркуля (теоремы Мора — Маскерони).

Каждая конструктивная задача на построение циркулем и линейкой в плоскости Евклида всегда сводится к решению (выполнению) в определенном порядке следующих основных простейших задач (основных операций):

1. Через две данные точки провести прямую.
2. Из данной точки, как из центра, провести окружность данного радиуса.
3. Найти точки пересечения двух данных окружностей.

4. Найти точки пересечения данной окружности и прямой, заданной двумя точками.

5. Найти точку пересечения двух прямых, каждая из которых задана двумя точками.

Для доказательства того, что каждая задача на построение циркулем и линейкой может быть решена и одним лишь циркулем, без употребления линейки, достаточно показать, что все эти основные операции могут быть выполнены одним циркулем.

Вторая и третья операции циркулем выполняются непосредственно. Выполнение остальных основных операций приведено в задачах 5—7 данного параграфа.

Допустим теперь, что некоторую задачу на построение, разрешимую циркулем и линейкой, требуется решить одним только циркулем. Представим себе эту задачу решенной циркулем и линейкой; в результате решение задачи сведется к выполнению некоторой конечной последовательности пяти основных операций. Выполнив каждую из этих операций одним циркулем (задачи 5—7), мы придем к решению предложенной задачи.

Приведенный метод решения геометрических задач на построение одним циркулем приводит, как правило, к весьма сложным и громоздким построениям, поэтому практически он малоэффективный. Однако с теоретической точки зрения он позволяет показать справедливость следующей основной теоремы в геометрии циркуля.

Основная теорема. *Все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, могут быть точно решены и одним только циркулем.*

§ 2. Решение геометрических задач на построение одним циркулем

В этом параграфе мы рассмотрим решение некоторых интересных задач из геометрии циркуля, разработанной в основном трудами Мора, Маскерони и Адлера. Решение некоторых из этих задач будет нами использовано во второй главе.

Задача 8. Построить прямую, перпендикулярную к заданному отрезку AB и проходящую через один из его концов.

Дано: $[AB]$. Построить: $(AE) \perp [AB]$.

Построение (1-й способ). Сохраняя раствор циркуля неизменным и равным произвольному значению r,

чертим окружности (A, r) и (B, r), в пересечении которых получим точку O. (Из двух точек пересечения этих окружностей берем любую из них.) Проводим окружность (O, r) и строим на ней точку E, диаметрально противоположную точке B (см. задачу 2). Прямая AE — искомая (рис. 10), т. е. $(AE) \perp [AB]$.

Справедливость построения следует из того, что угол BAE вписан в окружность (O, r) и опирается на ее диаметр.

Построение (2-й способ). Проводим окружность $(B, |AB|)$ (рис. 11), берем на ней произвольную точку C и описываем окружность $(C, |AC|)$. Пусть D —

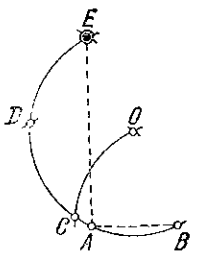

Рис. 10.

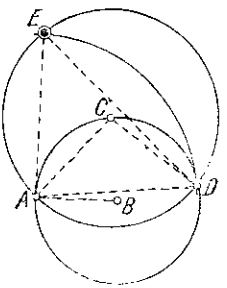

Рис. 11.

точка пересечения этих окружностей. Если теперь провести третью окружность $(A, |AD|)$ до пересечения ее с окружностью $(C, |AC|)$ в точке E, то получим $(AE) \perp [AB]$, т. е. (AE) — искомая прямая.

Доказательство. Отрезок AC соединяет центры окружностей $(A, |AD|)$ и $(C, |AC|)$, DE — их общая хорда. Значит, $(AC) \perp [DE]$ и $\overset{\frown}{CAD} = \overset{\frown}{CAE}$ (треугольник ADE — равнобедренный).

С другой стороны, $\overset{\frown}{CAD} = \overset{\frown}{ADC} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC}$.

Из последних равенств следует:

$$\overset{\frown}{CAE} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC},$$

т. е. прямая AE является касательной к окружности $(B, |AB|)$ в точке A, и, значит, $(AE) \perp [AB]$.

Задача 9. Построить отрезок, в n раз меньший данного отрезка AB (разделить отрезок AB на n равных частей, $n = 2, 3, \ldots$). $|AB| = a$.

Дано: $[AB]$ и $n \in \mathbf{N}$. Построить: $[AX]$, $|AX| = \frac{1}{n}|AB|$

Построение (1-й способ). Строим отрезок $|AC| = n \cdot |AB|$ (задача 2). Проводим окружность $(C, |CA|)$, которая пересечет окружность (A, a) в точках D и D_1. Если теперь провести окружности (D, a) и (D_1, a) и обозначить через X точку их пересечения, то отрезок AX — искомый (рис. 12).

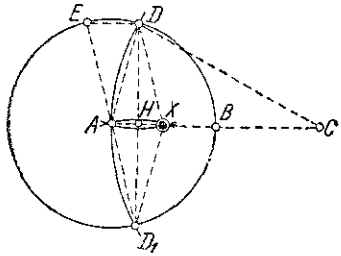

Рис. 12.

Точка X лежит на прямой AB. Увеличивая отрезок AX в 2, 3 и т. д., в $n-1$ раз (задача 2), мы построим точки, которые будут делить отрезок AB на n равных частей.

Доказательство. Из подобия равнобедренных треугольников ACD и ADX ($\angle A$ — общий) следует:

$$|AC| : |AD| = |AD| : |AX|,$$

или

$$|AD|^2 = a^2 = |AC| \cdot |AX| = na \cdot |AX|.$$

Отсюда

$$|AX| = \frac{1}{n}|AB| = \frac{1}{n}a.$$

Примечание. При больших значениях n точка X определяется нечетко; дуги окружностей (D, a) и (D_1, a) пересекаются в точке X под очень малым углом*). В этом случае вместо окружности (D_1, a) для определения точки X можно провести окружность $(A, |DE|)$, где E — точка, диаметрально противоположная точке D_1 окружности (A, a).

Построение (2-й способ). Строим отрезок $|AC| = n \cdot |AB|$ (задача 2). Проводим затем окружности $(A, |AC|)$, $(C, |AC|)$ и (C, a), которые пересекутся в точках D и E. Если теперь провести окружности (D, a)

*) Определение угла пересечения двух кривых см. в § 8 (с. 63).

и $(C, |DE|)$, то в пересечении их получим точку X, для которой $|AX| = \frac{1}{n}|AB|$. (рис. 13).

Доказательство. Точка X лежит на прямой AB, так как $[AC] \parallel [DE]$ и $[CX] \parallel [DE]$ (фигура $CEDX$ — параллелограмм). Из подобия равнобедренных треугольников ACD и ADX получим $|AX| = \frac{1}{n}|AB|$.

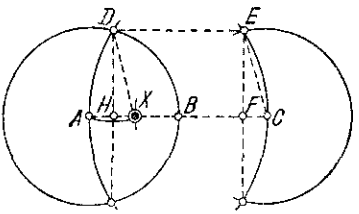

Рис. 13.

Приведем еще построение, предложенное проф. А. С. Смогоржевским *). Это построение отличается от предыдущих тем, что искомая $1/n$ часть отрезка AB не лежит на данном отрезке.

Построение (3-й способ). Строим отрезок $|AC| = n \cdot |AB|$ (задача 2). Проводим окружности $(A, |AC|)$ и $(B, |AC|)$. Берем одну из точек из пересечения D и описываем окружность $(D, |AB|)$, которая пересечет две последних в точках E и H. Отрезок EH — искомый (рис. 14).

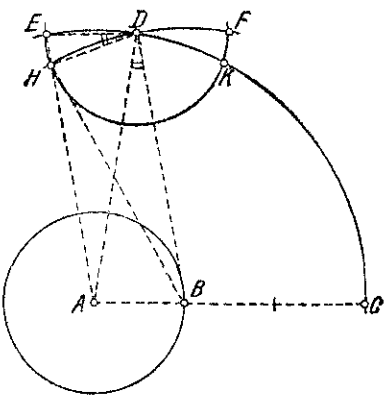

Рис. 14.

Доказательство. $\triangle ADE \cong \triangle BDH$ (по трем сторонам), поэтому $\overset{\frown}{ADB} = \overset{\frown}{EDH}$. Из подобия равнобедрен-

*) См. [11] в списке рекомендованной литературы (с. 75).

ных треугольников ADB и EDH можем записать:

$$|EH|:|ED| = |AB|:|AD|,$$

или

$$|EH|:a = a:na.$$

Окончательно

$$|EH| = \frac{1}{n}\,a = \frac{1}{n}\,|AB|.$$

Заметим, что

$$|EK| = \frac{\sqrt{4n^2-1}}{n}\,|AB|,$$

$$|HK| = \left(2 - \frac{1}{n^2}\right)|AB|.$$

Задача 10. Построить отрезок, в 2^n раз меньший данного отрезка AB (разделить отрезок AB на 2^n равных частей, $n = 1, 2, 3, \ldots$).

Дано: $[AB]$ и $n \in \mathbf{N}$. Построить: $[BX_n]$, $|BX_n| = \frac{1}{n}\,|AB|$, где $|AB| = a$.

Построение (1-й способ). Строим отрезок $|AC| = 2|AB|$ (задача 2). Проводим окружность $(C, |AC|)$.

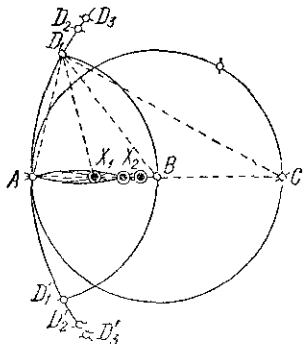

Рис. 15.

и обозначаем через D_1 и D'_1 точки ее пересечения с окружностью (A, a). Если теперь провести окружности $(D_1, |AD_1|)$ и $(D'_1, |AD'_1|)$, то в пересечении получим точку X_1. Отрезок BX_1 — искомый $\left(|BX_1| = \frac{1}{2}\,|AB|\right)$ (рис. 15).

Затем проводим окружность $(A, |BD_1|)$. В пересечении с окружностью $(C, |AC|)$ получим точки D_2 и D'_2.

Описываем окружности $(D_2, |AD_2|)$ и $(D'_2, |AD'_2|)$, которые пересекутся в точке X_2. Отрезок BX_2 — искомый $\left(|BX_2| = \frac{1}{2^2}|AB|\right)$.

Если теперь провести окружности $(A, |BD_2|)$, $(D_3, |AD_3|)$ и $(D'_3, |AD'_3|)$, то получим точку X_3. Отрезок BX_3 — искомый $\left(|BX_3| = \frac{1}{2^3}|AB|\right)$ и т. д.

Доказательство. Из подобия равнобедренных треугольников ACD_1 и AD_1X_1 следует:

$$|AD_1| : |AC| = |AX_1| : |AD_1|,$$

или

$$a : 2a = |AX_1| : a.$$

Отсюда

$$|AX_1| = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}|AB| = |BX_1|.$$

Введем обозначение $|BD_k| = m_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Отрезок BD_1 является медианой треугольника ACD_1, следовательно,

$$4|BD_1|^2 = 2|AD_1|^2 + 2|CD_1|^2 - |AC|^2,$$

или, иначе,

$$4m_1^2 = 2a^2 + 2|AC|^2 - |AC|^2 = 2a^2 + |AC|^2 = 2a^2 + 4a^2.$$

Значит,

$$m_1^2 = |BD_1|^2 = \frac{1+2}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2.$$

Из подобия равнобедренных треугольников ACD_2 и AD_2X_2 получим

$$|AD_2| : |AC| = |AX_2| : |AD_2|,$$

и, принимая во внимание, что $|AD_2| = |BD_1| = m_1$ и $|AC| = 2a$, будем иметь

$$|AX_2| = \frac{3}{4}a \quad \text{или} \quad |BX_2| = \frac{1}{4}a = \frac{1}{2^2}|AB|.$$

Аналогично находим

$$m_2^2 = \frac{1+2+2^2}{2^3}a^2 \quad \text{и} \quad |BX_3| = \frac{1}{2^3}|AB|,$$

и т. д. Вообще

$$m_{k-1}^2 = \frac{1+2+2^2+\ldots+2^{k-1}}{2^{k-1}}a^2 \quad \text{и} \quad |BX_k| = \frac{1}{2^k}|AB|.$$

Точка X_n лежит на отрезке AB. Для того чтобы отрезок AB разделить на 2^n равных частей, надо отрезок BX_n увеличить в 2, 3, ..., 2^n-1 раз (задача 2). Построенные точки будут делить отрезок AB на 2^n равных частей.

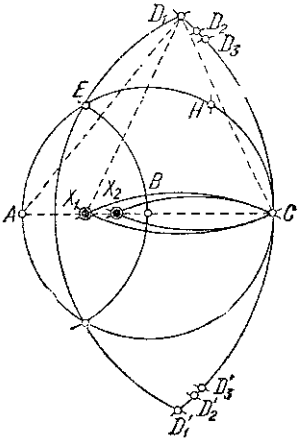

Рис. 16.

Построение (2-й способ). Строим отрезок $|AC|=2|AB|$ (задача 2), для чего на окружности (B, a) строим точку C, диаметрально противоположную точке A ($|AE|=|EH|=|HC|=a$). Проводим окружности $(A, |AC|)$ и $(C, |CE|)$ и отмечаем D_1 и D'_1—точки их пересечения (рис. 16). Искомую точку X_1 получим в пересечении окружностей $(D_1, |CD_1|)$ и $(D'_1, |CD'_1|)$. Очевидно, $|BX_1|=\frac{1}{3}|AB|$.

Проводим окружность $(C, |BD_1|)$, которая пересечет окружность $(A, |AC|)$ в точках D_2 и D'_2. Если затем провести окружности $(D_2, |CD_2|)$ и $(D'_2, |CD'_2|)$, то в их пересечении получим искомую точку X_2. Отрезок BX_2 — искомый $\left(|BX_2|=\frac{1}{3^2}|AB|\right)$.

Аналогично, описывая окружности $(C, |BD_2|)$, $(D_3, |CD_3|)$ и $(D'_3, |CD'_3|)$, построим точку X_3. Отрезок BX_3 — искомый $\left(|BX_3|=\frac{1}{3^3}|AB|\right)$ и т. д.

Доказательство. Из подобия равнобедренных треугольников ACD_1 и CD_1X_1 получим

$$|CX_1|:|CD_1|=|CD_1|:|AC|.$$

Принимая во внимание, что $|CD_1|=|CE|=\sqrt{3}a$, находим $|CX_1|=\frac{3}{3}a$; значит, $|BX_1|=\frac{1}{3}|AB|$.

Введем обозначение $|BD_k|=m_k$, где $k=1, 2, ..., n$,

Отрезок BD_1 является медианой треугольника ACD_1, следовательно,

$$4|BD_1|^2 = 4m_1^2 = 2|AD_1|^2 + 2|CD_1|^2 - |AC|^2 = \\ = 2|AC|^2 + 2|CE|^2 - |AC|^2 = 4a^2 + 2 \cdot 3a^2,$$

или

$$m_1^2 = \left(1 + \frac{3}{2}\right) a^2.$$

В силу подобия равнобедренных треугольников ACD_2 и AD_2X_2, имеем

$$|CX_2| : |CD_2| = |CD_2| : |AC|.$$

Заметив, что $|CD_2| = |BD_1| = m_1$ и $|AC| = 2|AB| = 2a$, получим

$$|CX_2| = \frac{|CD_2|^2}{|AC|} = \frac{m_1^2}{2a} = \frac{5}{2^2}\, a.$$

Следовательно,

$$|BX_2| = \frac{1}{2^2}\,|AB|.$$

Совершенно аналогично докажем, что

$$m_2^2 = |BD_2|^2 = \frac{9}{4}\, a^2, \quad |CX_3| = \frac{9}{8}\, a$$

и $|BX_3| = \frac{1}{2^3}\,|AB|$

и т. д. Вообще

$$m_{k-1}^2 = |BD_{k-1}|^2 = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-2}} + \frac{3}{2^{k-1}}\right) a^2$$

и

$$|BX_k| = \frac{1}{2^k}\, a = \frac{1}{2^k}\,|AB|.$$

Если при первом способе построения для больших значений k ($k \leqslant n$) точка X_k определяется нечетко (дуги окружностей, определяющие эту точку, почти касаются друг друга), то решить задачу можно следующим способом.

Построение (3-й способ). Строим отрезок $|AC| = 2|AB|$ (задача 2). Проводим окружности $(A, |AC|)$, $(C, |AC|)$ и (C, a), в пересечении которых получим точ-

ки D_1 и E_1 (рис. 17). В пересечении окружностей $(D_1, |AD_1|)$ и $(C, |D_1E_1|)$ получим точку X_1. Отрезок BX_1 — искомый $\left(|BX_1| = \frac{1}{2}|AB|\right)$.

Строим далее $|AD_2| \cong |E_2C| \cong |BD_1|$, для чего проводим окружности $(A, |BD_1|)$ и $(C, |BD_1|)$. Описываем окружности $(D_2, |AD_2|)$ и $(C, |D_2E_2|)$ до пересечения их в точке X_2. Отрезок BX_2 — искомый $\left(|BX_2| = \frac{1}{2^2}|AB|\right)$ и т. д.

Доказательство. Положим $|BD_k| = m_k$, где $k = 1, 2, \ldots, n$. Точка X_1 лежит на прямой AC, так как $[AC] \parallel [D_1E_1]$ (фигура AD_1E_1C — трапеция) и $[CX_1] \parallel [D_1E_1]$ (фигура $X_1D_1E_1C$ — параллелограмм); значит, $[X_1C] \parallel [AC]$. Аналогично устанавливаем, что точки X_2, X_3,... лежат на прямой AC.

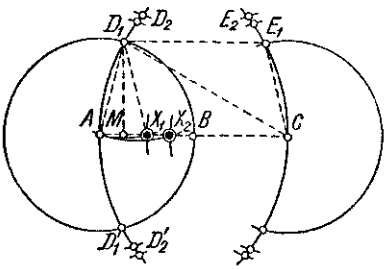

Рис. 17.

Фигура AD_1E_1C — равнобедренная трапеция $(|AD_1| = |CE_1|)$, поэтому можем записать: $|AM| = |MX_1|$, где $[MD_1] \perp [AC]$ и $|X_1C| = |D_1E_1|$. Следовательно,

$$|AD_1| = |D_1X_1| = |AD_1'| = |D_1'X_1| = a.$$

Аналогично нетрудно установить, что

$$|AD_2| = |D_2X_2| = |AD_2'| = |D_2'X_2| = m_1,$$

. . . . . .

$$|AD_k| = |D_kX_k| = |AD_k'| = |D_k'X_k| = m_{k-1}.$$

Повторяя теперь слово в слово доказательство, приведенное при первом способе построения данной задачи, получим

$$|BX_1| = \frac{1}{2}|AB|, \quad |BX_2| = \frac{1}{2^2}|AB|, \ldots$$

$$\ldots, |BX_k| = \frac{1}{2^k}|AB|. \ \ldots$$

Задача 11. Построить отрезок, в 3^n раз больший данного отрезка AA_0 $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Дано: $[AA_0]$ и $n \in \mathbf{N}$ Построить: $[AA_n]$, $|AA_n| = 3^n|AA_0|$.

Построение. Проводим окружности $(A, |AA_0|)$ и $(A_0, |AA_0|)$, точки пересечения которых обозначим через E и E' (рис. 18). Описываем окружности $(E, |AA_0|)$

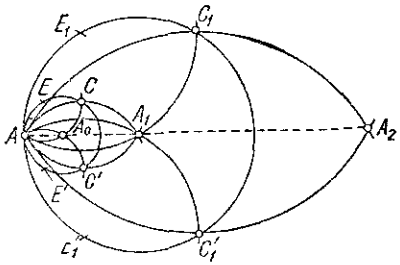

Рис. 18.

и $(E', |AA_0|)$, которые пересекут окружность $(A_0, |AA_0|)$ в точках C и C' Пусть точка A_1 является точкой пересечения окружностей $(C, |AC|)$ и $(C', |AC'|)$.. Отрезок AA_1 — искомый ($|AA_1| = 3|AA_0|$).

Повторяя для отрезка AA_1 те же построения, которые были приведены выше для отрезка AA_0, найдем отрезок AA_2, причем $|AA_2| = 3^2|AA_0|$, и т. д.

Доказательство. В равностороннем треугольнике ACC' $|AC| = |AC'| = |CC'| = \sqrt{3}|AA_0|$, $h_{\triangle ACC'} = \frac{\sqrt{3}}{2}|AC| = \frac{3}{2}|AA_0|$. Очевидно, что $|AA_1| = 2h_{\triangle ACC'} = 3|AA_0|$. Аналогично доказываем, что $|AA_2| = 3^2|AA_0|$, и т. д.

Задача 12. Разделить отрезок AB на три равные части.

Дано: $[AB]$. Построить: $[AX] \cong [XY] \cong [YB]$, $X \in [AB]$ и $Y \in [AB]$.

Рассмотрим изящный способ построения, предложенный Л. Маскерони [10].

Построение. Строим на прямой AB точки C и D так, чтобы $|CA| = |AB| = |BD|$ (задача 2). Проводим окружности $(C, |CB|)$, $(C, |CD|)$, $(D, |AD|)$ и $(D, |CD|)$, в пересечении которых получим точки E, E_1,

F и F_1 (рис. 19). В пересечении окружностей $(E, |CE|)$ и $(E_1, |CE_1|)$, $(F, |DF|)$ и $(F_1, |DF_1|)$ определим искомые точки X и Y, делящие отрезок AB на три равные части.

Доказательство. Из подобия равнобедренных треугольников CEX и CDE следует:

$$|CX| : |CE| = |CE| : |DC|$$

Принимая во внимание, что $|CE| = 2|AB|$ и $|CD| = 3|AB|$, получим $|CX| = \frac{4}{3}|AB|$, следовательно,

$$|AX| = \frac{1}{3}|AB|.$$

Задача 13. Построить центр начерченной окружности.

Построение. Берем на данной окружности точку A и произвольным радиусом d проводим окружность (A, d), в пересечении получим точки B и D. На окружности (A, d) определяем точку C, диаметрально противоположную точке B. Проводим, далее, окружности $(C, |CD|)$ и $(A, |CD|)$ и обозначаем через E точку их пересечения. И, наконец, описываем окружность $(E, |CD|)$, которая пересечет окружность (A, d) в точке M. Отрезок BM равен радиусу данной окружности. Окружности $(B, |BM|)$ и $(A, |BM|)$ определят искомый центр начерченной окружности (рис. 20).

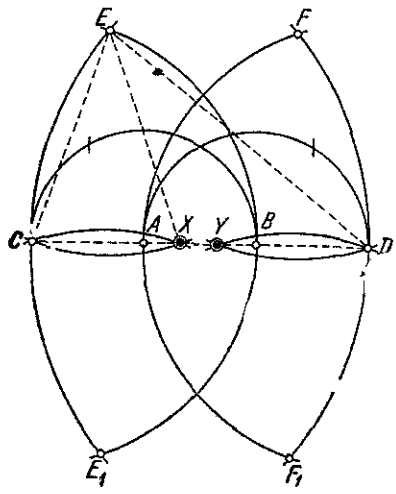

Рис. 19.

Доказательство. Равнобедренные треугольники ACE и AEM конгруэнтны, следовательно $\overset{\frown}{EAM} = \overset{\frown}{ACE}$,

Далее, $\overset{\frown}{BAE}=\overset{\frown}{ACE}+\overset{\frown}{AEC}$ ($\angle BAE$ — внешний угол треугольника ACE), и, с другой стороны, $\overset{\frown}{BAE}=\overset{\frown}{BAM}+\overset{\frown}{EAM}$. Отсюда $\overset{\frown}{BAM}=\overset{\frown}{AEC}$.

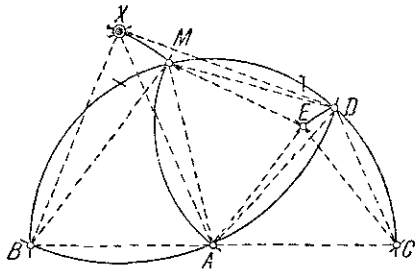

Рис. 20.

Таким образом, равнобедренные треугольники ABM и ACE подобны, следовательно,

$$|BM| : |AB| = |AC| : |CE|$$

или

$$|BX| : |AB| = |AC| : |CD|.$$

Из последнего соотношения следует, что равнобедренные треугольники ABX и ACD подобны, значит,

$$\overset{\frown}{BAX} = \overset{\frown}{ACD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD} = \overset{\frown}{DAX};$$

последние два равенства следуют из того, что

$$\overset{\frown}{BAD} = \overset{\frown}{ADC} + \overset{\frown}{ACD} = 2\overset{\frown}{ACD} = 2\overset{\frown}{BAX}.$$

На основании $\overset{\frown}{BAX}=\overset{\frown}{DAX}$ заключаем, что равнобедренные треугольники ABX и ADX конгруэнтны, следовательно,

$$|BX| = |AX| = |DX|.$$

Точка X — искомый центр окружности.

Примечание. Нетрудно доказать, что отрезок $d=|AB|$ следует брать больше половины радиуса заданной окружности, в противном случае окружности $(C, |CD|)$ и $(A, |CD|)$ не будут пересекаться.

В заключение этого параграфа проводим без доказательства решение следующей задачи Л. Маскерони [10].

Задача 14. Построить отрезок, в $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ раз больший отрезка AB, где $|AB| = 1$, $n = 1, 2, \ldots, 25$.

Дано: $|AB|$. Построить: $\frac{1}{2}\sqrt{n}\,|AB|$, $n = 1, 2, \ldots, 25$.

Построение. Проводим окружность $(A, |AB|)$ и отмечаем на ней точку B. Строим точку E, диаметрально противоположную точке B ($|BC| = |CD| = |DE| = 1$). Проводим окружности $(B, |BD|)$ и $(E, |EC|)$, и пусть F и F_1 — точки их пересечения. Описываем окружности $(B, |AF|)$ и $(E, |AF|)$, которые пересекут окружность $(A, |AB|)$ в точках H и H_1, а окружности $(B, |BD|)$ и $(E, |CE|)$ — в точках N и N_1, M и M_1. Проводим окружности $(E, |AE|)$ и $(B, |AB|)$ и отмечаем точки P, P_1, Q и Q_1 их пересечения с окружностями $(B, |AF|)$ и $(E, |AF|)$ (рис. 21). Окружности $(P, |BP|)$ и $(P_1, |BP_1|)$ пересекутся в точке R, а окружность $(A, |AB|)$ они пересекут в точках S и S_1. Точно так же окружности $(Q, |EQ|)$ и $(Q_1, |EQ_1|)$ пересекутся в точке T, а окружность $(A, |AB|)$ пересекут в точках O и O_1. Проводим окружности $(R, |AB|)$ и $(F_1, |AB|)$ и отмечаем точки L, L_1 и G пересечения их с окружностью $(A, |AB|)$. Описываем теперь окружности $(O, |AO|)$ и $(O_1, |AO_1|)$, которые пересекутся в точке K. И, наконец, проводим окружности $(K, |AB|)$ и $(T, |AB|)$ и отмечаем точки I и I_1 их пересечения. Тогда

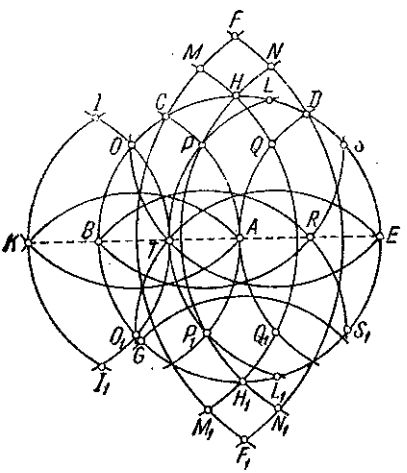

Рис. 21.

$$|AT| = \frac{1}{2}\sqrt{1},\quad |PT| = \frac{1}{2}\sqrt{2},\quad |DR| = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$|AB| = \frac{1}{2}\sqrt{4}, \quad |HT| = \frac{1}{2}\sqrt{5}, \quad |AM| = \frac{1}{2}\sqrt{6},$$

$$|QQ_1| = \frac{1}{2}\sqrt{7}, \quad |AF| = \frac{1}{2}\sqrt{8}, \quad |BR| = \frac{1}{2}\sqrt{9},$$

$$|BL| = \frac{1}{2}\sqrt{10}, \quad |PS_1| = \frac{1}{2}\sqrt{11}, \quad |BD| = \frac{1}{2}\sqrt{12},$$

$$|HK| = \frac{1}{2}\sqrt{13}, \quad |BS| = \frac{1}{2}\sqrt{14}, \quad |LL_1| = \frac{1}{2}\sqrt{15},$$

$$|BE| = \frac{1}{2}\sqrt{16}, \quad |FK| = \frac{1}{2}\sqrt{17}, \quad |KN| = \frac{1}{2}\sqrt{18},$$

$$|KD| = \frac{1}{2}\sqrt{19}, \quad |FG| = \frac{1}{2}\sqrt{20}, \quad |I_1D| = \frac{1}{2}\sqrt{21},$$

$$|KS| = \frac{1}{2}\sqrt{22}, \quad |MM_1| = \frac{1}{2}\sqrt{23}, |MN_1| = \frac{1}{2}\sqrt{24},$$

$$|KE| = \frac{1}{2}\sqrt{25} = \frac{1}{2}\sqrt{25}\,|AB|.$$

§ 3. Инверсия и ее основные свойства

В конце XIX столетия А. Адлер применил принцип инверсии к теории геометрических построений одним циркулем. С помощью этого принципа он установил в геометрии циркуля общий способ решения задач на построение.

В этом параграфе мы дадим определение инверсии и остановимся вкратце на основных ее свойствах, которые будут использованы в дальнейшем изложении.

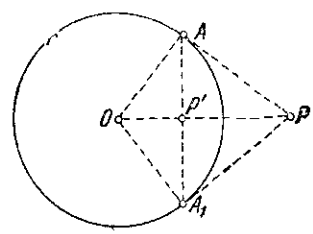

Рис. 22.

Пусть в плоскости чертежа дана некоторая окружность (O, r) и точка P, отличная от точки O (рис. 22) *).

Возьмем на луче OP точку P' так, чтобы произведение длин отрезков OP и OP' равнялось квадрату радиуса данной окружности, т. е.

$$|OP| \cdot |OP'| = r^2. \qquad (1)$$

*) Условимся в дальнейшем на чертеже значение r радиуса окружности записывать в разрыве дуги этой окружности (см. рис. 22).

Такую точку P' называют *инверсной* точке P относительно окружности (O, r). Окружность (O, r) называют *окружностью инверсии* или *базовой окружностью*, ее центр O — *центром инверсии* или *полюсом инверсии*, а величину r^2 — *степенью инверсии*.

Если точка P' инверсна точке P, то, очевидно, и наоборот, точка P инверсна точке P'.

Соответствие между инверсными точками, или иначе, преобразование, которое каждой точке P некоторой фигуры ставит в соответствие ей инверсную точку P', называется *инверсией* или *преобразованием обратных радиусов* *).

Из определения инверсии следует, что каждой точке P на плоскости соответствует определенная и единственная точка P' той же плоскости, причем, если $|OP|>r$, то $|OP'|<r$. Исключение составляет центр инверсии O. Точке O не может быть инверсна никакая точка плоскости, что немедленно следует из равенства (1) **).

Пусть (AP) и (A_1P) — касательные, проведенные к окружности инверсии (O, r) из точки P, лежащей вне этой окружности (см. рис. 22). Тогда точка P' пересечения прямых AA_1 и OP будет инверсна точке P. Действительно, в прямоугольном треугольнике OAP (AP' — высота)

$$|OP| \cdot |OP'| = |OA|^2 = r^2.$$

Пусть точка P перемещается по некоторой кривой l, тогда ее инверсная точка P' будет также описывать некоторую кривую l'. Кривые l и l' называются *взаимно инверсными*.

Лемма. *Если точки P' и Q' инверсны точкам P и Q относительно окружности (O, r), то*

$$\angle OP'Q' \cong \angle OQP \text{ и } \angle OQ'P' \cong \angle OPQ.$$

---

*) Положим $|OA|=r=1$, $|OP|=R$, $|OP'|=R'$; равенство (1) в этом случае запишется так: $R=\frac{1}{R'}$, т. е. расстояния инверсных точек P и P' от центра инверсии O являются взаимно обратными числами. Слово «инверсия» в переводе с латинского (inversio) означает обращение, перестановку.

**) В теории конформных отображений центру O ставят в соответствие «бесконечно удаленную точку» плоскости из тех соображений, что $|OP| \to \infty$ при $|OP'| \to 0$. Вообще, с помощью инверсии точки, лежащие в круге (O, r), преобразуются в точки плоскости, лежащие вне этого круга, и наоборот.

Доказательство. Из равенств $|OP| \cdot |OP'| = |OQ| \cdot |OQ'| = r^2$ или $\frac{|OP|}{|OQ|} = \frac{|OQ'|}{|OP'|}$ следует, что треугольники $OQ'P'$ и OQP подобны (рис. 23). Этим утверждение леммы доказано.

Из определения инверсии немедленно следуют две теоремы.

Теорема I. *Если две кривые пересекаются в точке P, то инверсные им кривые пересекаются в точке P′, инверсной точке P.*

Теорема II. *Прямая, проходящая через центр инверсии O, сама себе инверсна.*

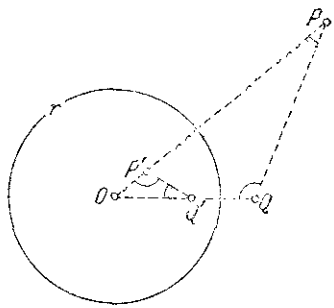

Рис. 23.

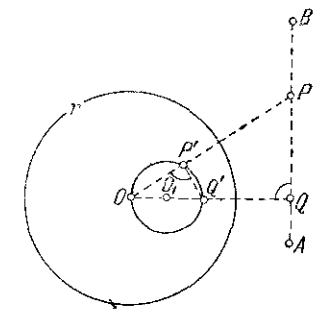

Рис. 24.

Теорема III. *Кривая, инверсная данной прямой AB, не проходящей через центр инверсии, есть окружность* $(O_1, |OO_1|)$, *проходящая через центр инверсии O, причем всегда* $(OO_1) \perp (AB)$.

Доказательство. Пусть Q — основание перпендикуляра, опущенного из центра O на данную прямую. Обозначим через Q' точку, инверсную точке Q. Возьмем на данной прямой произвольную точку P и обозначим через P' инверсную ей точку (рис. 24).

На основании леммы можем записать:

$$\widehat{OP'Q'} = \widehat{OQP} = 90°.$$

Следовательно, когда точка P будет перемещаться по прямой AB, инверсная ей точка P' будет описывать окружность, имеющую отрезок OQ' своим диаметром.

Так как окружность $(O_1, |OO_1|)$ и данная прямая AB являются взаимно инверсными, то имеет место также обратное утверждение, а именно, что окружности,

проходящей через центр инверсии, будет инверсна прямая линия.

Теорема IV. *Кривая, инверсная данной окружности* (O_1, R), *не проходящей через центр инверсии, есть также окружность. Центр инверсии является при этом центром подобия этих окружностей.*

Доказательство. Пусть линия центров OO_1 окружности инверсии (O, r) и данной окружности (O_1, R)

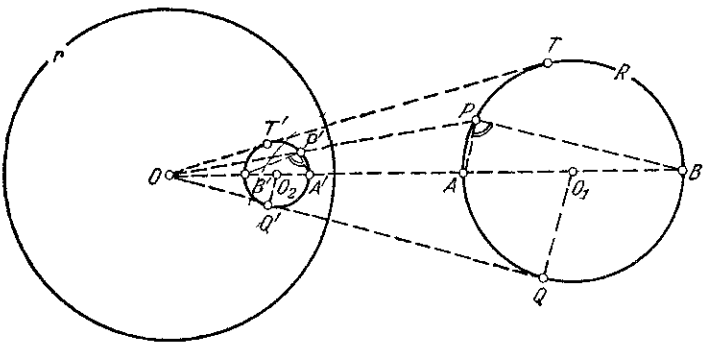

Рис. 25.

пересекает последнюю из них в точках A и B. Обозначим через A' и B' точки, инверсные точкам A и B. Возьмем на окружности (O_1, R) произвольную точку P и инверсную ей точку обозначим через P' (рис. 25). Применяя лемму, получим

$$\angle OA'P' \cong \angle OPA \quad \text{и} \quad \angle OB'P' \cong \angle OPB,$$

отсюда

$$\overset{\frown}{OB'P'} - \overset{\frown}{OA'P'} = \overset{\frown}{OPB} - \overset{\frown}{OPA}.$$

В треугольниках $A'P'B'$ и APB

$$\overset{\frown}{A'P'B'} = \overset{\frown}{OB'P'} - \overset{\frown}{OA'P'} \quad \text{и} \quad \overset{\frown}{APB} = \overset{\frown}{OPB} - \overset{\frown}{OPA} = 90°.$$

Принимая во внимание предыдущее равенство, получим

$$\overset{\frown}{A'P'B'} = \overset{\frown}{APB} = 90°.$$

Пусть точка P перемещается по данной окружности (O_1, R), тогда инверсная ей точка P' будет описывать окружность $(O_2, |O_2P'|)$, имеющую отрезок $A'B'$ своим диаметром. Теорема доказана.

Если QQ' и TT' — общие внешние касательные данной окружности (O_1, R) и инверсной ей окружности $(O_2, |O_2P'|)$, то точки касания Q, Q' и T, T' будут всегда взаимно инверсны. Перпендикуляр, проведенный через точку Q' к касательной QQ', пересечет линию центров OO_1 в точке O_2, являющейся центром окружности, инверсной данной.

Из прямоугольных треугольников OO_1Q и OO_2Q можем записать:

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{|OQ|}{|OQ'|} = k,$$

где k — это коэффициент гомотетии окружностей $(O_2, |O_2P'|)$ и (O_1, R). Следовательно,

$$\mathbf{H}_O^k(\smile Q'B'T') = \smile QAT \quad \text{и} \quad \mathbf{H}_O^k(\smile Q'A'T') = \smile QBT,$$

где H_O — преобразование гомотетии (подобия) с центром гомотетии O и коэффициентом k.

Следует заметить, что $\smile Q'B'T'$ инверсна $\smile QBT$ и $\smile Q'A'T'$ инверсна $\smile QAT$.

§ 4. Применение метода инверсии в геометрии циркуля

Приложение метода инверсии к решению геометрических задач на построение одним циркулем дает возможность указать общий метод, общий подход к решению конструктивных задач геометрии циркуля.

Построения Мора — Маскерони хотя и являются чрезвычайно изящными, однако в большинстве случаев они получаются столь искусственным путем, что невольно задаешь себе вопрос, как каждое из этих построений могло быть установлено.

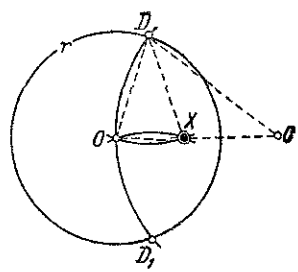

Рис. 26.

Задача 15. Построить точку X, инверсную данной точке C относительно окружности инверсии (O, r).

Дано: (O, r) и точка C. Построить: $X \in [OC)$, $|OX| \cdot |OC| = r^2$.

Построение в случае $|OC| > r/2$ (рис. 26). Проводим окружность $(C, |OC|)$ и обозначаем через D и

вв 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

D_1 точки их пересечения с окружностью инверсии (O, r). Если теперь провести окружности $(D, |OD|)$ и $(D_1, |OD_1|)$, то в пересечении их получим искомую точку X.

Доказательство. Из подобия равнобедренных треугольников CDO и DOX находим

$$|OC| : |OD| = |OD| : |OX|,$$

или

$$|OC| \cdot |OX| = |OD|^2 = r^2.$$

Примечание. Нетрудно видеть, что данное построение совпадает с построением, приведенным в задаче 9 (1-й способ), если отрезок $|AC| = n|AB|$ не

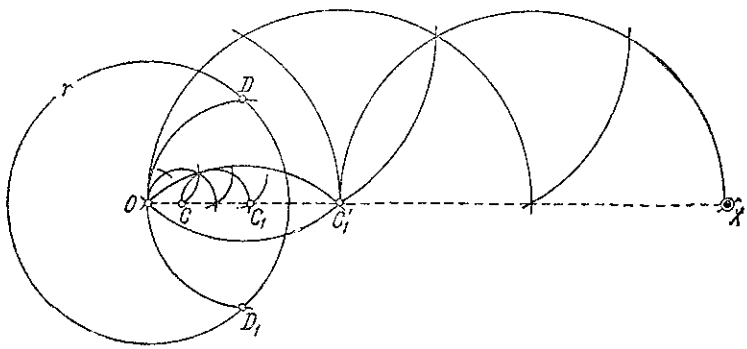

Рис. 27.

строить, а считать точку C уже заданиой. При решеиии задачи 15 можно также использовать примечаиие к 1-му способу решеиия задачи 9. Очевидно, что здесь можно использовать и 2-й способ решения задачи 9 (строить отрезок $|AC| = n|AB|$ в этом случае также не следует).

Построеиие в случае $|OC| \leqslant \frac{r}{2}$ (рис. 27). Окружиость $(C, |OC|)$ ие будет пересекать окружность инверсии, поэтому строим отрезок $|OC_1| = n|OC|$, причем иатуральиое число n берем таким, чтобы $|OC_1| > \frac{r}{2}$ (задача 2). Находим точку C'_1, иверсную точке C_1 (1-й случай построеиия). Строим отрезок $|OX| = n|OC'_1|$. Точка X иверсна данной точке C.

Доказательство. Подставляя $|OC_1| = n|OC|$ и $|OC_1'| = \frac{|OX|}{n}$ в равенство $|OC_1| \cdot |OC_1'| = r^2$, получим

$$|OC_1| \cdot |OC_1'| = n|OC| \cdot \frac{|OX|}{n} = |OC| \cdot |OX| = r^2.$$

Примечание. Приведенное построение возможно, если точка C не совпадает с центром инверсии.

Задача 16. Даны окружность инверсии (O, r) и прямая AB, не проходящая через центр инверсии. Построить окружность, инверсную этой прямой.

Дано: (O, r) и (AB) (O не принадлежит (AB)). Построить: $(O'_1, |OO'_1|)$, инверсную (AB).

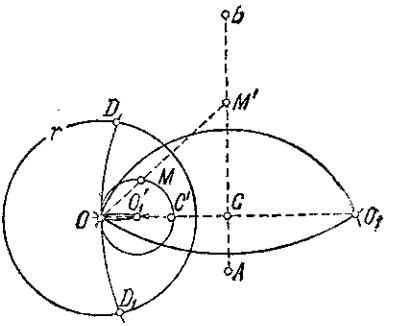

Рис. 28.

Построение. Строим точку O_1, симметричную центру инверсии O относительно прямой AB (задача 1). Находим точку O'_1, инверсную точке O_1 (задача 15). Окружность $(O'_1, |OO'_1|)$ инверсна данной прямой AB (рис. 28).

Доказательство. Пусть C и C' — соответственно точки пересечения прямой OO_1 с окружностью $(O'_1, |OO'_1|)$ и с данной прямой AB.

Из приведенного построения следует:

$$|OO_1| \cdot |OO_1'| = r^2, \quad |OO_1| = 2|OC|,$$
$$|OC'| = 2|OO_1'|, \ (OC) \perp (AB).$$

Отсюда

$$|OO_1| \cdot |OO_1'| = 2|OC| \cdot \frac{|OC'|}{2} = |OC| \cdot |OC'| = r^2.$$

В силу теоремы III окружность $(O'_1, |OO'_1|)$ инверсна прямой AB.

Примечание. Если прямая проходит через центр инверсии, то она сама себе инверсна (теорема II).

Задача 17. Построить прямую AB, инверсную данной окружности (O_1, R), проходящей через центр инверсии O.

Построение. Если данная окружность пересекает окружность инверсии в точках A и B, то прямая AB инверсна этой окружности. В противном случае берем на данной окружности точки A_1 и B_1 (рис. 29) и строим инверсные им точки A и B (задача 15). Прямая AB инверсна данной окружности (O_1, R).

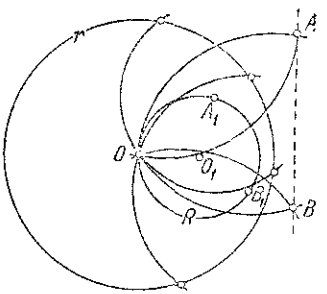

Рис. 29.

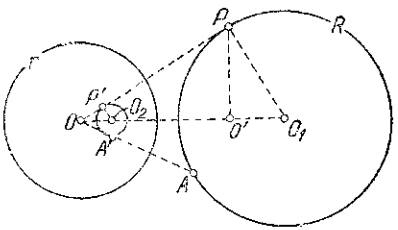

Рис. 30.

Меняя положение точек A_1 и B_1 на данной окружности (или применяя задачу 5), можно построить сколько угодно точек этой прямой.

Справедливость построения следует из теоремы III.

Задача 18. Дана окружность (O_1, R), не проходящая через центр инверсии O. Построить окружность, инверсную данной.

Построение. Принимая данную окружность (O_1, R) за окружность инверсии, строим точку O', инверсную точке O (задача 15). Строим затем точку O_2, инверсную точке O' относительно окружности инверсии (O, r). Точка O_2 является центром искомой окружности (рис. 30).

Берем на данной окружности (O_1, R) произвольную точку A и определяем инверсную ей точку A'. Окружность $(O_2, |O_2A'|)$ инверсна данной окружности (O_1, R).

Доказательство. Пусть PP' — общая внешняя касательная окружностей (O_1, R) и $(O_2, |O_2A'|)$, и пусть $(PO') \perp (OO_1)$.

В силу подобия прямоугольных треугольников OPO' и $OP'O_2$ можем записать:

$$|OO_2| : |OP'| = |OP| : |OO'|$$

или, иначе,

$$|OO_2| \cdot |OO'| = |OP| \cdot |OP'| = r^2,$$

так как точки P и P' взаимно инверсны. Из последнего равенства следует, что точки O_2 и O' инверсны относительно окружности инверсии (O, r).

В прямоугольном треугольнике OO_1P отрезок $O'P$ является высотой, следовательно,

$$|O_1O| \cdot |O_1O'| = |O_1P|^2 = R^2.$$

Таким образом, точка O' инверсна точке O относительно окружности (O_1, R), если последнюю принять за окружность инверсии.

Точка O дана. При построении сначала была построена точка O', а затем точка O_2 — центр искомой окружности.

Примечание. С помощью более сложных выкладок можно доказать, что приведенное построение остается справедливым и в случае, когда центр инверсии O находится внутри заданного круга (O_1, R) *).

* * *

В задачах 15—18 было показано, как, пользуясь одним циркулем, построить фигуры, инверсные точке, прямой и окружности. Теперь мы можем рассмотреть общий метод решения геометрических задач на построение одним лишь циркулем.

Каждое построение, выполняемое циркулем и линейкой, дает в плоскости чертежа фигуру Φ, состоящую из окружностей, прямых и отдельных точек. Фигура Φ', инверсная фигуре Φ относительно окружности (O, r), принятой за окружность инверсии, с центром O, не лежащем ни на одной из прямых и окружностей фигуры Φ, будет состоять *только* из *точек* и *окружностей*. Используя при этом задачи 15—18, увидим, что каждая из этих точек и прямых может быть построена одним лишь циркулем.

Допустим теперь, что некоторую задачу на построение, разрешимую циркулем и линейкой, требуется решить одним только циркулем.

---

*) Это доказательство приведено в Приложении II.

Представим себе, что эта задача решена циркулем и линейкой, в результате чего получена некоторая фигура Φ, состоящая из точек, прямых и окружностей. Построение этой фигуры будет осуществляться проведением в определенном порядке конечного числа прямых и окружностей.

Возьмем по возможности более подходящую окружность инверсии (O, r) и построим фигуру Φ', инверсную фигуре Φ (задачи 15—18). Фигура Φ' будет состоять только из точек и окружностей, если, конечно, окружность инверсии выбрана так, что ее центр не лежит ни на одной из прямых или окружностей фигуры Φ.

Если теперь построить изображение, инверсное для того образа, который принимается за результат на фигуре Φ', то мы придем к искомому результату. При этом надо заметить, что построение фигуры Φ' следует производить в том порядке, в котором производится построение фигуры Φ циркулем и линейкой.

Изложенным выше способом можно решить при помощи одного циркуля каждую конструктивную задачу на построение, разрешимую циркулем и линейкой. Основной результат Мора — Маскерони доказан еще раз с помощью метода инверсии.

Общим методом могут быть решены и пять простейших задач, приведенных в конце § 1.

В качестве иллюстрации общего метода решения задач на построение одним только циркулем приведем решение задачи 7. Построим точку пересечения двух данных прямых AB и CD, каждая из которых задана двумя точками.

Берем в плоскости произвольную окружность (O, r) с центром O, не лежащим на данных прямых, и принимаем ее за окружность инверсии. Строим окружности, инверсные данным прямым, и отмечаем точку X' их пересечения (задача 16). Строим точку X, инверсную точке X' (задача 15). Точка X является искомой точкой пересечения данных прямых AB и CD.

Здесь фигура Φ состоит из двух данных прямых AB и CD (точнее, состоит из четырех данных точек A, B, C и D, через которые мы мысленно проводим данные прямые); фигура Φ' состоит из двух окружностей, инверсных данным прямым AB и CD. Изображением, принимаемым на фигуре Φ' за результат, будет точка X'. Точка X, инверсная точке X', является искомым результатом — точкой пересечения данных прямых.

Точно так же можно решить задачу 6 (четвертая простейшая задача): построить точки пересечения данной прямой и данной окружности. Если при этом прямая не проходит через центр окружности, то за окружность инверсии следует взять данную окружность. Решение задачи при этом значительно упростится.

Справедливость этих построений немедленно следует из теоремы I.

Задача 19. Найти центр начерченной окружности.

Построение. Берем на данной окружности точку O и произвольным радиусом r описываем окружность (O, r), которая пересечет данную окружность в точках A и B. Принимаем окружность (O, r) за окружность инверсии и строим центр окружности, инверсной прямой AB (задача 16). Для выполнения последнего построения проводим окружности $(A, |OA|)$ и $(B, |OB|)$, пересекающиеся в точке O_1. Описываем окружность $(O_1, |OO_1|)$ и отмечаем точки D и D_1 пересечения ее с окружностью инверсии. Окружности $(D, |OD|)$ и $(D_1, |OD_1|)$ определяют искомый центр начерченной окружности (рис. 31).

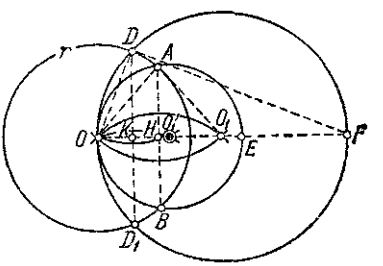

Рис. 31.

Доказательство. Точки A и B сами себе инверсны, так как лежат на окружности инверсии. Таким образом, данная начерченная окружность и прямая AB являются взаимно инверсными фигурами.

В задаче 16 было показано, что точка O'_1 является искомым центром данной окружности, которая в данном случае инверсна прямой AB.

Следует обратить внимание читателей на простоту и изящество решения последней задачи. Для нахождения центра окружности было проведено шесть окружностей *). Это построение проще и точнее, чем обычное построение, осуществляемое циркулем и линейкой.

Данную задачу, а также некоторые другие задачи геометрии циркуля, как, например, задачи 3 и 8 (2-й спо-

*) При условии, конечно, что радиус r взят большим половины радиуса данной окружности. В противном случае окружностей будет больше (см. решение задачи 15 — второй случай).

соб решения), на уроках геометрии можно предлагать учащимся старших классов в качестве упражнений. Исходя из этого, приведем доказательство задачи 19, не опираясь на принцип инверсии.

Доказательство. Прямая OO_1 перпендикулярна хорде AB данной окружности и проходит через ее середину, следовательно, искомый центр должен лежать на прямой OO_1. Пусть E и F — соответственно точки пересечения прямой OO_1 с данной окружностью и окружностью $(O_1, |OO_1|)$. Отрезок OK — диаметр данной окружности.

Из рассмотрения прямоугольных треугольников OAH и ODK, для которых отрезки AH и DK являются высотами, находим

$$|OA|^2 = |OE| \cdot |OH| \text{ и } |OD|^2 = |OF| \cdot |OK|.$$

Принимая во внимание, что $|OD| = |OA| = r$, $|OF| = 2|OO_1|$, $|OH| = \frac{1}{2}|OO_1|$ и $|OK| = \frac{1}{2}|OO_1|$, получим

$$|OE| \cdot |OH| = |OF| \cdot |OK|,$$

или

$$|OE| \cdot \frac{|OO_1|}{2} = 2|OO_1| \frac{|OO_1|}{2}.$$

Отсюда

$$|OO_1| = \frac{|OE|}{2}.$$

Задача 20. Около данного треугольника ABC описать окружность.

Построение. Описываем окружность $(A, |AB|)$ и принимаем ее за окружность инверсии. Строим точку C', инверсную точке C (задача 15). Строим окружность $(X, |AX|)$, инверсную прямой BC' (задача 16). $(X, |AX|)$ — искомая окружность, описанная около треугольника ABC (рис. 32).

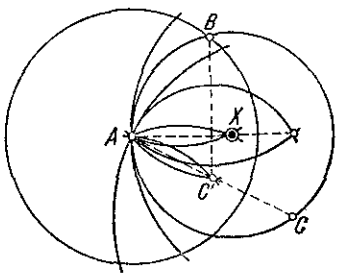

Рис. 32.

Доказательство. Точка B сама себе инверсна, так как лежит на окружности инверсии $(A, |AB|)$; точка C' инверсна точке C по построению. Следовательно, окружность, проходящая через данные точки A, B и C,

инверсна прямой BC'. А как было показано в задаче 16, точка X является центром искомой окружности *).

Примечание. Приведем теперь следующий способ решения задачи 18. Берем на данной окружности (O_1, R) произвольные точки A, B и C и строим инверсные им точки A', B' и C'. Окружность, описанная около треугольника $A'B'C'$, является искомой окружностью, инверсной данной.

---

*) В задаче 16 мы строили центр окружности, инверсной данной прямой. Это построение и было использовано для решения задач 19 и 20.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ ОДНИМ ЦИРКУЛЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

В первой главе нашей книги мы рассмотрели построения одним циркулем, которые можно теперь назвать *классической геометрией циркуля.*

В теории геометрических построений одним циркулем всегда подразумевается свободное пользование циркулем, когда на растворы ножек никаких ограничений не накладывается. Таким циркулем можно чертить окружности как угодно больших и как угодно малых радиусов.

Однако каждому известно, что практически данным конкретным циркулем можно описывать окружности, радиусы которых не больше некоторого отрезка R_{max} и не меньше отрезка R_{min}. Отрезок R_{max} равен максимальному, а R_{min} — минимальному раствору ножек данного циркуля. Если через r обозначить радиус окружности, которую можно описать этим циркулем, то всегда имеет место равенство

$$R_{min} \leqslant r \leqslant R_{max}.$$

Будем говорить, что в данном случае растворы ножек циркуля ограничены *снизу* отрезком R_{min} и ограничены *сверху* отрезком R_{max}.

В этой главе будут рассмотрены геометрические построения одним циркулем, когда на растворы ножек наложены некоторые ограничения.

§ 5. Построения одним циркулем с раствором ножек, ограниченным сверху

В данном параграфе мы будем пользоваться циркулем, растворы ножек которого ограничены *только сверху* некоторым наперед заданным отрезком R_{max}. Таким циркулем можно описывать окружности, радиусы которых не превышают этого отрезка. Для сокращения записи в дальнейшем будем вместо R_{max} писать просто R. Если обозначить через r радиус окружности, которую можно описать данным циркулем, то всегда

$$0 < r \leqslant R,$$

Задача 21. Построить отрезок, в 2^n раз меньший данного отрезка (разделить данный отрезок AB на 2, 4, 8,..., 2^n равных частей).

Построение. Нетрудно проверить, что в случае $|AB| \leqslant \frac{R}{2}$ *) можно воспользоваться построением задачи 10; радиус наибольшей окружности равен в этом построении $|AC| = 2|AB| \leqslant R$ **).

В случае $|AB| < 2R$ произвольным радиусом r описываем окружности (A, r) и (B, r) и обозначаем через C и D точки их пересечения. Изменяя величину радиуса r, всегда можно добиться того, что $|CD| \leqslant \frac{R}{2}$. Делим теперь пополам отрезок CD (задача 10), получим точку X_1. Очевидно, точка X_1 делит пополам и данный отрезок AB.

Точно так же построим точку X_2, делящую отрезок AX_1 пополам. Отрезок $|AX_2| = \frac{1}{4}|AB| \leqslant \frac{R}{2}$. Построение точек X_4, X_8, ..., 2^n сводится дальше к решению задачи 10.

Увеличивая $|AX_n| = \frac{|AB|}{2^n}$ в 2^n раз (задача 2), мы отрезок AB разделим на 2^n равных частей.

---

*) Для сравнения длин двух данных отрезков AB и CD следует описать окружность $(A, |CD|)$; если точка B лежит: а) внутри этой окружности, то $|AB| < |CD|$, б) на окружности, то $|AB| = |CD|$, в) вне окружности, то $|AB| > |CD|$.

Для проверки неравенства $|AB| \leqslant \frac{1}{2}R$ или неравенства $2|AB| \leqslant R$, следует провести окружность (A, R); если точка B лежит на окружности (A, R) или вне ее, то $2|AB| > |AB| \geqslant R$; если точка B лежит внутри этой окружности, то $|AB| < R$ и, следовательно, отрезок $2|AB|$ может быть построен (задача 2) и указанным выше способом сравнен с отрезком R.

**) При первом способе построения в задаче 10 нужно проверить, что $|AD_n| \leqslant R$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} |AD_n|^2 = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) a^2 =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots\right) a^2 = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2a^2 = 2|AB|^2,$$

т. е.

$$|AD_n| < \sqrt{2}\,|AB| < R.$$

В случае $|AB| \geqslant 2R$ построение будет дано в задаче 24.

Задача 22 (первая основная операция). На прямой, заданной двумя точками A и B, построить одну или несколько точек *).

Построение. Случай $|AB| < 2R$ сводится к задаче 5.

Пусть $|AB| \geqslant 2R$. Описываем окружности (B, R) и (A, r), где r — произвольный отрезок, меньший или равный R. Берем на окружности (A, r) точку C так, чтобы она «приближенно» лежала на отрезке AB (т. е. чтобы угол CAB был по возможности малым), и строим отрезок $|AD| = m|AC|$ (задача 2, $|AC| = r \leqslant R$). Натуральное число m подбираем так, чтобы точка D попала

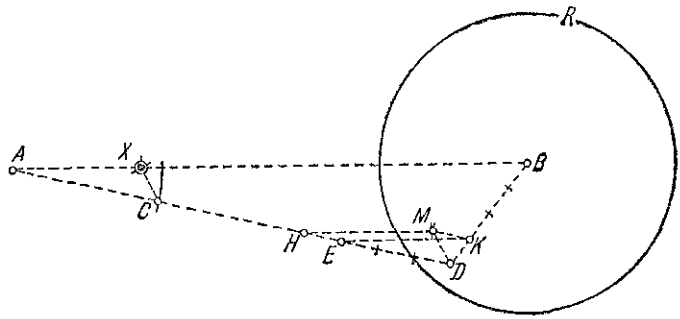

Рис. 33.

в круг (B, R) **). Изменяя положение точки C на дуге (A, r), а если нужно, то изменяя величину радиуса r, всегда можно добиться того, что точка D будет лежать в круге (B, R). При этом построим отрезки $|AC| = \ldots = |HD| = \frac{|AD|}{m}$ (рис. 33). Возьмем такое натуральное число n, чтобы $2^{n-1} < m \leqslant 2^n$. Строим отрезок $|DK| = \frac{1}{2^n}|BD|$ (задача 21, здесь $|BD| < 2R$). Делим отрезок DH на 2^n равных частей (задача 21,

*) Как уже отмечалось выше, одним циркулем, а тем более одним циркулем с ограниченным раствором ножек, мы не можем начертить непрерывной прямой, однако сможем построить любое количество точек этой прямой.

**) Точка D может и не лежать в круге (B, R); важно, чтобы $|BD| < 2R$. Точка должна лежать в круге $(B, 2R)$, но такую окружность данным циркулем мы описать не можем.

$|DH| = r \leqslant R$) и берем отрезок $|DE| = \frac{m}{2^n}|DH|$ (на рис. 33 $m=3$, $2^{2-1} < 3 < 2^2$, $n=2$, $|DE| = \frac{3}{4}|DH|$).

Строим параллелограмм $HEKM$, для чего следует провести окружности $(H, |EK|)$ и $(K, |EH|)$. (Если в пересечении этих окружностей точка M получается нечетко, то для построения точки M следует провести окружность $(E, |EK|)$ и отложить в этом круге хорды $|KP| = |PT|$, равные радиусу $|EK|$. В пересечении окружностей $(H, |EK|)$ и $(P, |TH|)$ получим точку M).

И, наконец, если провести окружности $(A, |HM|)$ и $(C, |DM|)$, то обе эти окружности пересекутся в искомой точке X, лежащей на прямой AB.

Дальнейшее построение точек данной прямой AB сводится к задаче 5 ($|AX| < 2R$).

Доказательство. Согласно построению можем записать:

$$\frac{|BD|}{|DK|} = 2^n \quad \text{и} \quad \frac{|AD|}{|DE|} = \frac{m|AC|}{\frac{m}{2^n}|AC|} = 2^n.$$

Таким образом, треугольники ADB и EDK подобны (угол ADB — общий). Значит,

$$\angle DEK \cong \angle DAB \text{ и } [EK] \parallel (AB).$$

Так как $[HM] \parallel [EK]$ (фигура $HEKM$ — параллелограмм), то

$$[HM] \parallel (AB).$$

Из конгруэнтности треугольников ACX и DHM следует $[AX] \parallel [HM]$, т. е. точка X лежит на прямой AB.

Радиусы всех окружностей, проведенных в данном построении, не превышают длины отрезка R.

Примечание. Если окажется, что $m = 2^n$, т. е. m принимает одно из значений 2, 4, 8, 16, ..., то построение задачи значительно упрощается; в этом случае точка E совпадает с точкой H, а точка M — с точкой K. Деление отрезка DH на 2^n равных частей и построение параллелограмма $EKMH$ в этом случае отпадают.

Таким образом, изменяя величину радиуса r, следует всегда добиваться того, чтобы число m приняло одно из значений 2, 4, 8, 16, ...

Задача 23. От данной точки C отложить отрезок, равный и параллельный данному отрезку AB.

Построение. Если точка C не лежит на прямой AB, то задача сводится к построению параллелограмма $ABDC$ ($\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{CD}$) или $ABCD'$ ($\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{CD'}$)*).

Пусть $|AB| \leqslant R$. Пусть $|AC| \leqslant R$ и точка C не лежит на прямой AB. Проводим окружности $(C, |AB|)$ и $(B, |AC|)$ и отмечаем точку D их пересечения. Отрезок CD — искомый, фигура $ABDC$ — параллелограмм.

Если отрезок нужно отложить от точки C в противоположном направлении ($\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{CD}$), то вместо окружности $(B, |AC|)$ следует провести окружность $(A, |BC|)$.

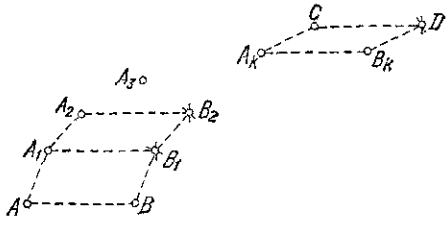

Рис. 34.

В случае $|BC| > R$ описать эту окружность данным циркулем мы не сможем, однако искомую точку получим, если на окружности $(C, |AB|)$ построим точку D', диаметрально противоположную точке D. Фигура $ABCD'$ — параллелограмм.

Пусть теперь $|AC| > R$ и $|BC| > R$ (рис. 34). В направлении от точки A к точке C берем произвольный ряд точек $A_1, A_2, \ldots, A_k$ с условием, что $|AA_1| \leqslant R$, $|A_1A_2| \leqslant R, \ldots, |A_kC| \leqslant R$, и строим параллелограммы ABB_1A_1, $A_1B_1B_2A_2, \ldots, A_{k-1}B_{k-1}B_kA_k$. Затем строим параллелограмм A_kB_kDC (или A_kB_kCD'). Отрезок CD — искомый. Если окажется, что точка A_i случайно лежит на прямой $A_{i-1}B_{i-1}$, то вместо точки A_i следует взять другую точку.

Это построение справедливо и в случае, если данная точка C лежит на данной прямой AB.

Рассмотрим теперь случай $|AB| > R$. Пользуясь решением задачи 22, строим на отрезке AB точки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с условиями $|AX_1| \leqslant R$, $|X_1X_2| \leqslant R, \ldots, |X_nB| \leqslant R$.

*) См. Приложение I.

Строим затем параллелограммы AX_1D_1C, $X_1X_2D_2D_1$, ..., $X_{n-1}X_nD_nD_{n-1}$, X_nBDD_n. Отрезок CD — искомый.

Задача 24. Построить отрезок, в 2^n раз меньший данного отрезка AB, в случае $|AB| \geqslant 2R$ (разделить отрезок на 2^n равных частей).

Построение. На данном отрезке AB находим точку C с условием $|AC| \leqslant R$ (задача 22). Строим отрезок $|AD| = m|AC|$ (задача 2), при этом натуральное число m берем таким, чтобы $|AD| \leqslant |AB|$ и $|DB| < R$, для чего отрезок AC повторяем два, три и т. д. раз, пока не придем к точке B. Если при этом число m окажется нечетным, то строим еще отрезок $|DD_1| = |AC|$; в этом случае $|AD_1| = (m+1)\,|AC|$, $|AB| \leq |AD_1|$ и $|BD_1| < R$ (на рис. 35 $m=6$).

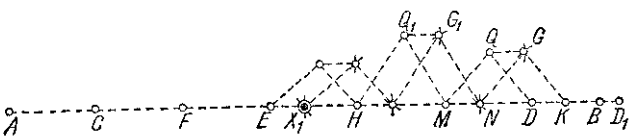

Рис. 35.

Делим точкой K отрезок BD (или BD_1) пополам (задача 21, $|BD| < R$).

Обозначим через E середину отрезка AD (или AD_1) и откладываем отрезок EX_1, равный и параллельный отрезку DK (задача 23), так, чтобы $|AX_1| = |AE| + |BK|$ (или $|AX_1| = |AE| - |BK|$, если точка E является серединой отрезка AD_1); для этого берем точки Q, Q_1, ... и строим параллелограммы $QDKG$, $MQGN$, Q_1MNG_1 и т. д. *)

Точка X_1 делит данный отрезок AB пополам.

Делим далее пополам отрезок AX_1, получим четвертую часть отрезка AB и т. д. Если при этом $|AX_1| < 2R$, то применяем построение, указанное в задаче 21, в противном случае построение проводим аналогично вышеизложенному.

Задача 25. Построить отрезок, в n раз больший данного отрезка AB, в случае $|AB| > R$.

Построение. Определяем на данной прямой AB точку C так, чтобы $|AC| < R$ (задача 22). Строим отре-

---

*) Точки X_1 будет построена, если построить $|AX_1| = |AE| \pm |BK|$ (см. примечание к задаче 6).

зок $|AD|=m|AC|$ (задача 2, $|AC|<R$), при этом число m подбираем так, чтобы $|AD|\leqslant|AB|$ и $0\leqslant|DB|<R$; для этого отрезок AC следует повторить два, три и т. д. раз, пока не дойдем до точки B (рис. 36).

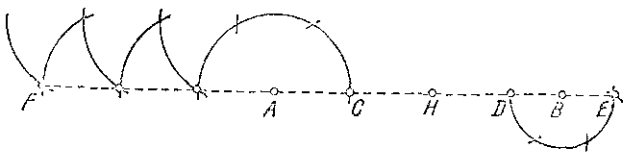

Рис. 36.

Строим отрезок $|DE|=n|DB|$ (задача 2, $|DB|<R$) так, чтобы $\vec{AD}\uparrow\downarrow\vec{DE}$ *), а затем отрезок $|AF|=(n-1)m|AC|$, причем $\vec{AF}\uparrow\downarrow\vec{AB}$. Отрезок $|FE|=n|AB|$ — искомый (на рис. 36 $m=3$, $n=2$).

Доказательство.

$$|FE|=|FA|+|AD|+|DE|=$$
$$=(n-1)m|AC|+m|AC|+n|DB|=$$
$$=nm|AC|+n|DB|=n(m|AC|+|DB|)=$$
$$=n(|AD|+|DB|)=n|AB|.$$

Примечание. Чтобы построить отрезок $|AM|=n|AB|$, необходимо вместо отрезка AF построить отрезок $|EM|=(n-1)m|AC|$ так, чтобы $\vec{EM}\uparrow\uparrow\vec{AB}$. Тогда получим $|AM|=n|AB|$, т. е. один конец данного и построенного отрезков совпадают.

Задача 26 (вторая основная операция). Из данной точки O, как из центра, описать окружность данного радиуса $|AB|$.

Построение. Если $|AB|\leqslant R$, то окружность данным циркулем с ограниченным раствором описывается непосредственно. Если же $|AB|>R$, то данным циркулем мы не можем начертить окружность в виде непрерывной кривой, однако в этом случае можно строить любое число точек, расположенных как угодно плотно на

*) См. Приложение I.

данной окружности, заданной центром и радиусом (рис. 37).

Строим отрезок $a = \frac{|AB|}{2^n}$ (задачи 21 и 24), при этом число n берем таким, чтобы $a \leqslant R$. Проводим окружность (O, a), берем на ней произвольную точку X_1

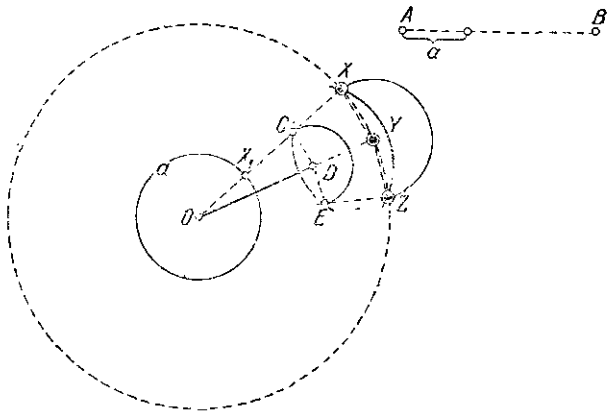

Рис. 37.

и строим отрезок $|OX| = 2^n |OX_1|$ (задача 2. $|OX_1| = a \leqslant R$). Точка X принадлежит данной окружности $(O, |AB|)$.

Изменяя положение точки X_1 на окружности (O, a), можно построить сколько угодно точек данной окружности.

Если на данной окружности уже построены две точки X и Y, причем $|XY| < R$ и $|DX| \leqslant R$, то дальнейшее построение точек окружности можно производить следующим образом. Проводим окружности $(Y, |XY|)$ и $(D, |DX|)$, пересекающиеся в точке Z. Точка Z принадлежит данной окружности. Описываем окружности $(D, |DC|)$ и $(Y, |CY|)$ и отмечаем E — точку их пересечения. Если теперь провести окружности $(Z, |YZ|)$ и $(E, |EY|)$, то построим еще одну точку окружности и т. д.

Доказательство. Отрезок $|OX| = 2^n a = 2^n \frac{|AB|}{2^n} = |AB|$.

Примечание. Если на отрезке AB задана еще точка K, такая, что $|AK| \leqslant R$ (или $|BK| \leqslant R$), то построение можно значительно упростить. Строим отрезок

$|AD| = m|AK|$ (задача 2, $|AK| \leqslant R$), при этом число m подбираем так, чтобы $|AD| \leqslant |AB|$ и $0 \leqslant |DB| < R$; для этого отрезок AK следует повторить два, три и т. д. раз (рис. 36). Если теперь провести окружность (O, a), где $a = |AK|$, взять на ней точку X_1, затем построить отрезок $|OC| = m|OX_1|$ и, наконец, отложить отрезок $|CX| = |DB|$ *) $(\overrightarrow{OC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CX})$. Точка X лежит на данной окружности (см. рис. 37).

Задача 27 (третья основная операция). Найти точки пересечения двух данных окружностей $(O, |AB|)$ и $(O_1, |CD|)$.

Построение. Если радиусы обеих окружностей не больше R, то построение их точек пересечения выполняется циркулем непосредственно.

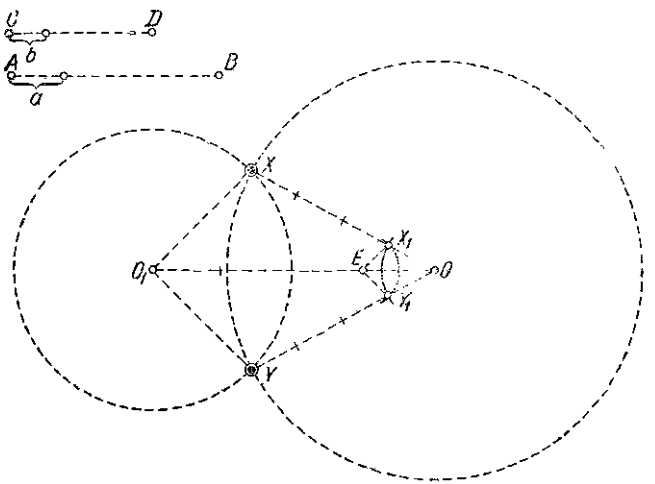

Рис. 38.

Предположим теперь, что радиус одной или радиусы обеих окружностей больше R.

Строим отрезки $a = \frac{|AB|}{2^n}$, $b = \frac{|CD|}{2^n}$ и $|OE| = \frac{|OO_1|}{2^n}$ (задачи 21 и 24); число n берем таким, чтобы $a \leqslant R$ и $b \leqslant R$ (рис. 38). Проводим окружности (O, a) и (E, b) и отмечаем точки их пересечения X_1 и Y_1. Если

*) См. примечание к задаче 6.

теперь построить отрезки $|OX|=2^n|OX_1|$ и $|OY|=2^n|OY_1|$; то получим искомые точки X и Y пересечения данных окружностей $(O, |AB|)$ и $(O_1, |CD|)$.

Доказательство.

$$|OX| = 2^n \cdot a = 2^n \cdot \frac{|AB|}{2^n} = |AB|,$$

$$|OY| = 2^n \cdot \frac{|AB|}{2^n} = |AB|.$$

Из подобия треугольников OXO_1 и OX_1E $\left(\frac{|OX|}{|OX_1|} = \frac{|OO_1|}{|OE|} = 2^n\right.$, угол O_1OX — общий) следует:

$$|O_1X| = 2^n \cdot |EX_1| = 2^n \cdot \frac{|CD|}{2^n} = |CD|.$$

Точно так же получим $|O_1Y|=|CD|$.

Задача 28. Построить точку C_1, симметричную данной точке C относительно данной прямой AB.

Построение. Для случая $|AC|\leqslant R$ и $|BC|\leqslant R$ построение дано в задаче 1. Если расстояние точки C от данной прямой AB меньше R, то, пользуясь задачей 22, на данной прямой всегда можно найти точки A_1 и B_1 так, что $|CA_1|\leqslant R$ и $|CB_1|\leqslant R$.

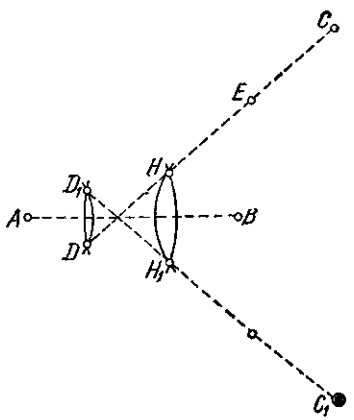

Рис. 39.

Пусть теперь расстояние точки C от данной прямой AB больше R. Можем считать $|AB|<2R$, в противном случае находим такие точки на данной прямой (задача 22).

Берем в плоскости точку E так, чтобы $|CE|\leqslant R$ и прямая CE пересекала отрезок AB. Строим отрезок $|CD|=m|CE|$ $(|CE|=\ldots=|HD|$; задача 2). Точку E и число m подберем так, чтобы отрезки AD, AH, BD и BH были меньше R.

Строим точки D_1 и H_1, симметричные точкам D и H относительно данной прямой (задача 1). Строим отрезок $|D_1C_1|=m|D_1H_1|$. Точка C_1 искомая, симметричная данной точке C относительно данной прямой AB (рис. 39), т. е. $C_1=S_{(AB)}(C)$.

Примечание. Решение задачи 1 остается справедливым и в общем случае, если для построения симметричной точки C_1 пересечения окружностей $(A, |AC|)$ и $(B, |BC|)$ мы воспользуемся задачей 27.

Задача 29 (четвертая основная операция). Построить точки пересечения данной окружности $(O, |CD|)$ и прямой, заданной двумя точками A и B.

Построение. В случае, если прямая не проходит через центр окружности, строим точку O_1, симметричную центру O данной окружности относительно прямой AB (задача 28). Определяем точки X и Y пересечения окружностей $(O, |CD|)$ и $(O_1, |CD|)$ (задача 27). Точки X и Y искомые.

В случае, если прямая проходит через центр окружности*) (рис. 40), строим отрезок $r = \frac{|CD|}{2^n}$ с условием $r \leqslant \frac{R}{2}$ (задачи 21 и 24). Проводим окружность (O, r) и обозначаем через A_1 и B_1 точки ее пересечения

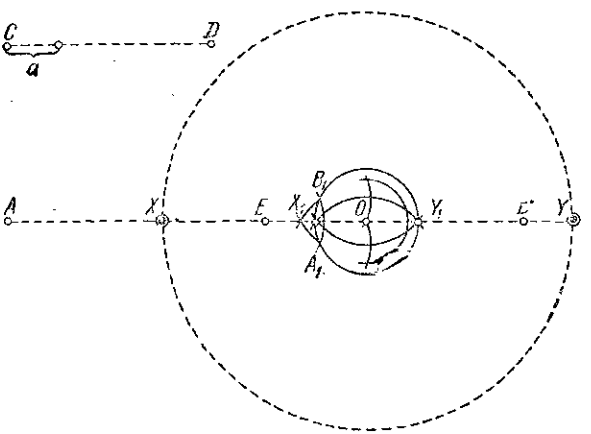

Рис. 40.

с окружностью (A, d) (или (B, d)), где d — произвольный отрезок, меньший или равный R. Если даже при $d=R$ окружности (A, R) или (B, R) не пересекают окружность (O, r) (в этом случае $|OA| > R+r$ и $|OB| > R+r$), то, пользуясь задачей 22, определяем точку E на прямой AB так, чтобы $|OE| < R+r$; окружность

*) Для проверки этого факта см. примечание к задаче 1.

(E, d) пересечет (O, r) в точках A_1 и B_1. Изменяя величину радиуса d, следует добиться того, чтобы $a = |A_1B_1| \leqslant \frac{R}{2}$.

Делим обе дуги A_1B_1 окружности (O, r) точками X_1, Y_1 пополам (задача 4). Строим отрезки $|OX| = 2^n|OX_1|$ и $|OY| = 2^n|OY_1|$ (задача 2, $|OX_1| = |OY_1| = r \leqslant \frac{R}{2}$). Точки X и Y — искомые точки пересечения данной прямой и данной окружности.

Наибольшая из окружностей, проведенных в данном построении, будет при делении дуги A_1B_1 пополам. При делении дуги пополам (см. задачу 4) радиус наибольшей окружности равен $|BC| = \sqrt{2a^2 + r^2}$ (см. рис. 5). В этом построении радиус будет удовлетворять неравенству

$$\sqrt{2a^2 + r^2} \leqslant \sqrt{2\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} < R.$$

Задача 30. Построить отрезок, четвертый пропорциональный к трем данным отрезкам a, b и c.

Построение. Если $a \leqslant R$, $b \leqslant R$ и $c \leqslant R$, то построение дано в задаче 3.

Пусть теперь хотя бы одно из указанных неравенств не имеет места. Строим отрезки $a_1 = \frac{a}{2^n}$, $b_1 = \frac{b}{2^n}$ и $c_1 = \frac{c}{2^m}$ (задачи 21 и 24), при этом натуральные числа n и m подбираем так, чтобы $a_1 \leqslant R$, $b_1 \leqslant R$, $c_1 \leqslant R$ и $c_1 < 2a_1$.

Строим отрезок x_1, четвертый пропорциональный к отрезкам a_1, b_1 и c_1. Если теперь построить отрезок $x = 2^m \cdot x_1$ (задачи 2 и 25), то найдем искомый отрезок, четвертый пропорциональный к трем данным отрезкам a, b и c.

Доказательство.

$$\frac{a}{2^n} : \frac{b}{2^n} = \frac{c}{2^m} : x_1.$$

Эту пропорцию можем записать так:

$$a : b = c : 2^m x_1.$$

Задача 31 (пятая основная операция). Построить точку пересечения данных прямых AB и CD, каждая из которых определена двумя точками.

Построение точки пересечения данных прямых линий циркулем с ограниченным раствором точно такое же, как и в задаче 7, однако вместо задач 1 и 3 следует использовать соответственно задачи 28 и 30. Для определения точки E и искомой точки X (пересечения прямых AB и CD) следует использовать задачу 27.

Примечание. Используя задачу 22, точки A, B, C и D, которыми определяются данные прямые, всегда можно выбрать так близко друг к другу, что все окружности, описываемые в этом построении, будут иметь радиусы не больше R и, следовательно, могут быть начерчены циркулем с ограниченным раствором ножек.

* * *

На основании вышеизложенного в данном параграфе приходим к следующему выводу.

Все пять основных операций (простейших задач) могут быть выполнены (решены) одним только циркулем, описывающим окружности, радиусы которых не превышают некоторого наперед заданного отрезка R.

Каждая геометрическая задача на построение, разрешимая циркулем и линейкой, всегда сводится к выполнению в определенном порядке конечной последовательности основных операций (§ 1).

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Все геометрические задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, могут быть точно решены и одним только циркулем, описывающим окружности, радиусы которых не превышают некоторого наперед заданного отрезка.*

Рассмотрим теперь общий метод решения конструктивных задач на построение одним циркулем, растворы ножек которого ограничены сверху отрезком R.

Допустим, что некоторую задачу на построение, разрешимую циркулем и линейкой, требуется решить одним циркулем с ограниченным раствором ножек. Представим себе эту задачу решенной одним циркулем в классическом смысле, при свободном пользовании циркулем, когда на раствор ножек никаких ограничений не накладывается; в результате получим некоторую фигуру Φ, состоящую из одних только окружностей, взятых в конечном числе. Обозначим через R_1 наибольший из радиусов всех окружностей, составляющих фигуру Φ. Если окажется, что $R_1 \leqslant R$, то указанное построение может

быть выполнено одним циркулем с ограниченным раствором ножек.

Пусть теперь $R_1 > R$. Возьмем натуральное число n таким, чтобы $\frac{R_1}{2^n} \leqslant R$. Если теперь все отрезки, данные в условии задачи, в том числе и отрезки, определяющие радиусы заданных окружностей, уменьшить в 2^n раз и затем провести решение задачи данным циркулем, то в результате получим фигуру Φ', подобную фигуре Φ с коэффициентом подобия (гомотетии), равным $\frac{1}{2^n}$. Все окружности фигуры Φ' могут быть начерчены данным циркулем, так как их радиусы не больше $\frac{R_1}{2^n}\left(\frac{R_1}{2^n} \leqslant \leqslant R\right)$. При этом следует заметить, что если среди данных в условии задачи имеется некоторая фигура Φ_1 в плоскости чертежа, то нужно одну из точек этой фигуры взять за центр подобия и построить ей подобную фигуру Φ'_1 с коэффициентом подобия $\frac{1}{2^n}$ (т. е. уменьшить фигуру Φ_1 в 2^n раз) *).

Обозначим через Ψ' ту часть фигуры Φ', которая принимается за искомый результат. Строим фигуру Ψ, подобную фигуре Ψ' с центром подобия O и коэффициентом подобия 2^n (увеличиваем фигуру Ψ' в 2^n раз), для чего строим отрезки $[OX_1]$, ..., $[OX_k]$ такие, что

$$|OX_1| = 2^n |OX'_1|, \quad |OX_2| = 2^n |OX'_2|, \ldots$$
$$\ldots, |OX_k| = 2^n |OX'_k|,$$

где через X'_1, X'_2, ..., X'_k обозначены все точки пересечения окружностей фигуры Ψ'. Точки X_1, X_2, ..., X_k фигуры Ψ будут центрами и точками пересечения окружностей, составляющих эту фигуру.

Фигура Ψ представляет искомый результат решения данной задачи. Прямые и окружности, радиусы которых больше R, на фигуре Ψ не могут быть начерчены данным циркулем; они могут быть построены в виде точек, как угодно плотно прилегающих друг к другу (задачи 22 и 26).

Для иллюстрации изложенного можно привести решение задачи 27. В этом решении фигура Φ состоит из

---

*) Данные к задаче могут задаваться несколькими фигурами Φ_1, Φ_2, ...

окружностей $(O, |AB|)$ и $(O_1, |CD|)$. Данными элементами являются три отрезка AB, CD и OO_1, где $|AB|$, $|CD|$ — радиусы заданных окружностей, а O и O_1 — центры этих окружностей, причем $|OO_1|$ — расстояние между центрами этих окружностей. Эти отрезки и есть соответственно заданные в условии задачи фигуры Φ_1, Φ_2 и Φ_3 (см. рис. 38). Фигуры Φ_1', Φ_2' и Φ_3' — это отрезки a, b и OE соответственно с центрами подобия A, C и O и коэффициентом подобия, равным $\frac{1}{2^n}$. Фигура Φ' состоит из окружностей (O, a) и (E, b) (вместе с их центрами O и E). Фигура Ψ', принимаемая на фигуре Φ' за искомый результат, состоит из двух точек X_1 и Y_1. Искомым результатом задачи (решения) является фигура Ψ, состоящая из точек X и Y. Точка O — центр подобия (на рис. 38 $2^n=4$, $n=2$).

При решении задач на построение число n обычно бывает неизвестным, так как данным циркулем мы не можем построить фигуру Φ, а значит, не будем знать радиуса R_1 наибольшей из окружностей. Учитывая это обстоятельство, решение задач данным циркулем с ограниченным раствором проводим до тех пор, пока не придем к окружности с радиусом $r_1 > R$. Определяем натуральное число n_1 так, чтобы $\frac{r_1}{2^{n_1}} \leqslant R$. Уменьшаем данные отрезки в 2^{n_1} раз и повторно начинаем решение данной задачи; в результате мы или полностью решим задачу и построим фигуру Φ', или снова придем к окружности радиуса $r_2 > R$. Определяем натуральное число n_2 так, чтобы $\frac{r_2}{2^{n_2}} \leqslant R$, и снова уменьшаем все отрезки в 2^{n_2} раз (при этом отрезки, данные в условии задачи, будут уменьшены в $2^{n_1+n_2}$ раз) и в третий раз начинаем решение задачи и т. д. После конечного числа k шагов фигура будет построена (исходные отрезки, данные в условии задачи, будут уменьшены в $2^{n_1+n_2+\ldots+n_k}$ раз).

Используя общий метод решения, нетрудно построить одним циркулем с ограниченным раствором фигуры, инверсные данной точке, прямой и окружности (задачи 15—18).

В заключение параграфа приведем решение следующей задачи.

Задача 32. Разделить данный отрезок AB на пять равных частей, если мы не можем иметь отрезок, в пять раз больший данного отрезка $|AB|=a$.

В обширном сочинении Л. Маскерони [10] эта задача является единственной, решенной с указанным в условии ограничением.

Построение. Описываем окружность (B, a) и строим точку E, диаметрально противоположную точке A (на рис. 41 $|AC|=|CD|=|DE|=a$). Проводим окружности $(A, |AD|)$ и $(E, |EC|)$, которые пересекутся в точках F и F_1. Отмечаем точку H пересечения окружностей (F_1, a) с окружностью (B, a). Описываем затем окружности $(H, |HF_1|)$ и $(F, |AE|)$, в пересечении которых получим точку G. Окружность $(A, |F_1G|)$ пересечет окружность (B, a) в точках K и K_1. Если теперь провести окружности $(K, |AK|)$ и $(K_1, |AK_1|)$, то и построим искомую точку X, т. е.

$$|BX| = \frac{1}{5}|AB|.$$

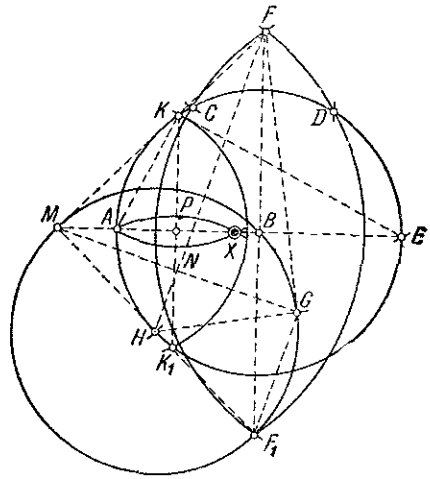

Рис. 41.

Доказательство. Пусть на окружности $(H, |HF_1|)$ точка M диаметрально противоположна точке F_1, и пусть N — точка пересечения прямых HF и MG. Отрезок $|BF|=|BF_1|=\sqrt{2}a$. Длина касательной, проведенной из точки F к окружности $(H, |HF_1|)$, равна

$$b=\sqrt{|FF_1|\cdot|FB|}=\sqrt{2\sqrt{2}a\sqrt{2}a}=2a.$$

Но, с другой стороны, $|FG|=2a$ по построенню, значит, прямая FG касается окружности $(H, |HF_1|)$ в точке G.

Из прямоугольного треугольника FGH имеем

$$|HF|=\sqrt{|HG|^2+|GF|^2}=\sqrt{5}a.$$

Треугольник FMF_1 — равнобедренный, так как угол F_1BM — прямой, вписанный и опирающийся на диаметр F_1M окружности $(H, |HF_1|)$. Значит, $|MF_1|=|MF|=2a$.

Треугольник MGF также равнобедренный ($|MF| = |FG| = 2a$), поэтому $(MG) \perp (HF)$.

Из прямоугольного треугольника HGF, для которого отрезок GN является высотой, получим

$$|HG|^2 = a^2 = |HF| \cdot |HN| = \sqrt{5}a\,|HN|$$

или

$$|HN| = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Из прямоугольных треугольников HNG и MGF_1 находим

$$|NG| = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{2a}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}|MG|,$$

$$|GF_1|^2 = 4a^2 - \frac{16}{5}a^2 = \frac{4}{5}a^2.$$

И, наконец, из прямоугольного треугольника AKE имеем

$$|AK|^2 = |GF_1|^2 = |AE| \cdot |AP| = 2a \cdot \frac{|AX|}{2} = |AX| \cdot a,$$

или

$$|AX| = \frac{|GF_1|^2}{a} = \frac{4a}{5}.$$

Отсюда

$$|BX| = \frac{1}{5}|AB|.$$

§ 6. Построения одним циркулем с раствором ножек, ограниченным снизу

В данном параграфе мы будем пользоваться циркулем, растворы ножек которого ограничены *только снизу* наперед заданным отрезком $R_{\min}$. Таким циркулем можно описывать окружности любого радиуса, большего или равного отрезку $R_{\min}$. В дальнейшем будем вместо $R_{\min}$ писать просто R.

Задача 33. Построить отрезок, в n раз больший данного отрезка AA_1.

Построение. Строим отрезок A_1E, перпендикулярный к данному отрезку AA_1 (задача 8, берем $|OA| \geqslant$

$\geqslant R$). Определяем точку E', симметричную точке E относительно прямой AA_1 (задача 1, здесь $|AE|>R$ и $|A_1E|>R$). Строим точку A_2, симметричную точке A относительно прямой EE'. Получаем $|AA_2|=2|AA_1|$ (рис. 42).

Строим затем $[A_2E_1]\perp[AA_2]$ и $E_1'=\mathbf{S}_{(AA_2)}(E_1)$. Если теперь построить точки $A_3=\mathbf{S}_{(E,E_1')}(A_1)$ и $A_4=\mathbf{S}_{(E,E_1')}(A)$, то будем иметь

$$|AA_3|=3|AA_1|,\quad |AA_4|=4|AA_1|.$$

Дальше построение повторяется аналогично.

Для случая $|AA_1|\geqslant R$ построение дано в задаче 2.

Радиусы всех окружностей, проведенных в этом построении, не меньше R.

Примечание. Из приведенного построения очевидно, что точки A_2, A_4, A_8, A_{16},... можно строить сразу, пропуская при этом построение точек A_3, A_5, A_6, A_7, A_9, ..., т. е. находить отрезки, в 2, 4, 8, 16, ..., 2^n раз большие данного отрезка AA_1.

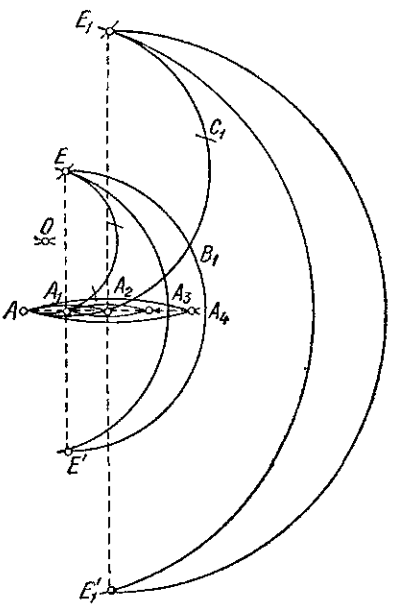

Рис. 42.

Задача 34. Построить отрезок, в n раз меньший данного отрезка AB (разделить отрезок на n равных частей).

Построение. При $|AB|\geqslant R$ построение дано в задаче 9.

Пусть теперь $|AB|<R$. Строим отрезок $|AB'|=m|AB|$ (задача 33), при этом натуральное число m берем таким, чтобы $|AB'|\geqslant R$. Делим отрезок AB' на nm равных частей (задача 9). Получим искомый отрезок AX:

$$|AX|=\frac{|AB'|}{nm}.$$

Действительно,

$$|AX| = \frac{|AB'|}{nm} = \frac{m|AB|}{nm} = \frac{|AB|}{n}.$$

Примечание. Если в данном случае вместо построения задачи 9 применить построение задачи 10, то получим

$$|AX| = \frac{1}{2^n}|AB|.$$

Решение задачи 5 остается справедливым и для циркуля с раствором ножек, ограниченным снизу.

Задача 35 (вторая основная операция). Из данной точки O, как из центра, описать окружность радиуса $r=|AB|$.

Построение. Если $|AB|\geqslant R$, то окружность данным циркулем описывается непосредственно. Если же $|AB|<R$, то данным циркулем мы не можем начертить

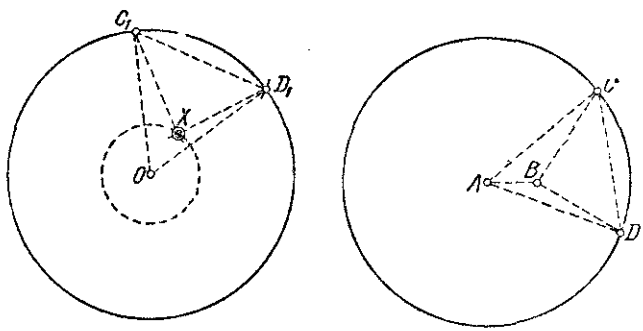

Рис. 43.

окружность в виде непрерывной кривой; в этом случае можно строить любое число точек, расположенных как угодно плотно на окружности, заданной центром и радиусом.

Пусть $|AB|<R$. Произвольным радиусом $a>R+r$ описываем окружности (O, a) и (A, a) и берем на второй из них две точки C и D так, чтобы $|CD|\geqslant R$. Берем на (O, a) точку C_1 и проводим окружность $(C_1, |CD|)$ и отмечаем точку ее пересечения с (O, a) через D_1. Если теперь описать окружности $(C_1, |CB|)$ и $(D_1, |BD|)$, то в пересечении получим точку X, лежащую на заданной окружности (O, r). Меняя положение хорды C_1D_1 на окружности (O, a), можно построить сколько угодно точек данной окружности (рис. 43).

Справедливость построения немедленно следует из конгруэнтности треугольников ACD, OC_1D_1 и BCD, XC_1D_1.

Рассмотрим теперь общий метод решения геометрических задач на построение одним циркулем, растворы ножек которого ограничены снизу отрезком R. Этим методом можно решать каждую задачу на построение, разрешимую циркулем и линейкой, в том числе третью, четвертую и пятую основные простейшие задачи (задачи 5—7).

Общий метод решения задач на построение одним циркулем, описывающим окружности, радиусы которых не меньше R, совпадает с общим методом решения задач, проведенным в § 5. Различие этих методов заключается в том, что данные в условии задачи отрезки нужно не уменьшать в 2^n раз, а наоборот, увеличивать в n (или 2^n) раз (задача 33).

Допустим, что некоторую задачу на построение, разрешимую циркулем и линейкой, требуется решить одним циркулем, растворы ножек которого ограничены снизу отрезком R. Представим себе эту задачу решенной одним циркулем, когда на растворы ножек никаких ограничений не накладывается; в результате получим некоторую фигуру Φ, состоящую из одних только окружностей. Обозначим через R_1 наименьший из радиусов всех этих окружностей, составляющих фигуру Φ. Подбираем такое натуральное число n, чтобы $nR_1 \geqslant R$, и строим фигуру Φ', подобную фигуре Φ и в n раз большую нее. Обозначим через Ψ' ту часть фигуры Φ', которая принимается за искомый результат. Если теперь построить фигуру Ψ, в n раз меньшую фигуры Ψ', то и придем к искомому результату решения нашей задачи (задача 34).

Итак, мы пришли к следующей теореме.

Теорема. *Все геометрические задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, могут быть точно решены и одним только циркулем, описывающим окружности, радиусы которых не меньше длины некоторого наперед заданного отрезка.*

§ 7. Построения одним циркулем с постоянным раствором ножек

Геометрические построения одним циркулем с постоянным раствором, которым можно описывать окружности только раднуса R, рассматривались многими учеными. Значительная часть сочинения «Книги геометриче-

ских построений» арабского ученого Абу Вафа посвящена этому вопросу. Решением задач на построение одним циркулем с постоянным раствором занимались Леонардо да Винчи, Кардано, Тарталья, Феррари и др.

Циркулем с постоянным раствором, равным R, мы можем провести прямую, перпендикулярную к отрезку AB и проходящую через один из его концов, если только $|AB|<2R$ (задача 8); можем отрезок R увеличить в 2, 3, 4, ... раз (задача 2). Если $|AB|<2R$ и $|AB|\neq R$, то можно строить точки прямой AB (задача 5), меняя при этом каждый раз положение симметричных точек C и C_1. Однако мы не можем этим циркулем делить отрезки и дуги на равные части, находить пропорциональные отрезки и т. д.

Таким образом, *с помощью одного циркуля с постоянным раствором невозможно решить все задачи на построение, которые можно решать циркулем и линейкой.*

В двух предыдущих параграфах мы рассмотрели решения геометрических задач на построения одним лишь циркулем, когда на растворы ножек были наложены некоторые ограничения, и предложили общие методы решения задач с помощью таких инструментов.

Естественно возникает вопрос о возможности решения геометрических задач на построение одним циркулем с ограниченным раствором ножек одновременно и сверху и снизу, т. е. циркулем, описывающим окружности радиуса, не меньшего R_{min} и не большего R_{max}.

Ответ на этот вопрос был дан в работе японского математика Китизи Янагихара (Yanagihara K. On limited Mascheroni geometrical construction.— Tôhoku Math. J., 1931, 34). К. Янагихара доказал: «Все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, могут быть точно решены и одним только циркулем и в том случае, если величина радиуса ограничена одновременно и сверху и снизу отрезками R_{max} и R_{min}».

Сложность и абстрактность этого доказательства лишила нас возможности привести его в данной брошюре.

Разность $R_{max}-R_{min}$ в основной теореме Янагихара может быть взята достаточно малой. Таким образом, все геометрические задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, могут быть точно решены и одним лишь циркулем с «почти» постоянным раствором ножек, а, как уже отмечалось в начале данного параграфа, циркулем с постоянным раствором все эти задачи решить нельзя.

§ 8. Построения одним циркулем с условием, что все окружности проходят через одну и ту же точку

В этом параграфе мы рассмотрим решение геометрических задач на построение одним лишь циркулем, при условии, что все проведенные окружности будут проходить через одну и ту же точку плоскости *).

Определение. Под *углом пересечения* двух окружностей (в общем случае — двух кривых) понимают угол, составленный касательными, проведенными к этим окружностям (кривым) в точке их пересечения. Окружности называются *ортогональными*, если они пересекаются под прямым углом.

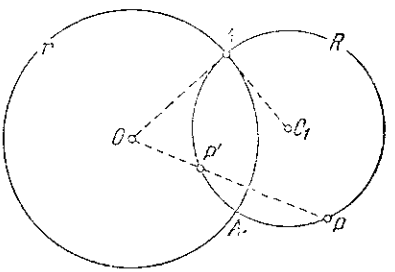

Рис. 44.

Теорема I. *Если окружность* (O_1, R) *пересекает окружность инверсии* (O, r) *ортогонально, то она сама себе инверсна* **).

Доказательство. Если окружности пересекаются ортогонально, то угол OAO_1, образованный радиусами, проведенными в точку пересечения этих окружностей, равен прямому углу. Значит, прямая OA является касательной, проведенной к окружности (O_1, R) в точке A, и

$$|OP| \cdot |OP'| = |OA|^2 = r^2.$$

Последнее равенство справедливо для любой секущей OP. Точка P' инверсна точке P. Дуга APA_1 окружности (O_1, R) инверсна дуге $AP'A_1$ (рис. 44).

В задаче 11 было дано построение отрезка, в 3^n раз большего данного отрезка AA_0. При выполнении этого построения все окружности проходят через точку A. Исключение представляет окружность $(A, |AA_0|)$, которую мы проводим для того, чтобы определить точки E и E', и которая не проходит через точку A (рис. 18).

Однако окружности $(A, |AA_0|)$ можно не проводить, а поступить следующим образом.

---

*) В этом параграфе на растворы ножек циркуля никаких ограничений не накладывается.

**) Справедливо также обратное утверждение теоремы, однако в данном параграфе оно не будет использовано.

Делаем раствор ножек циркуля равным $|AA_0|$ и ставим острие карандаша в точку A (это острие карандаша фактически ничем не отличается от острия-иголки второй ножки циркуля), затем, не изменяя раствора циркуля, устанавливаем вторую ножку так, чтобы острие иголки попало на дугу окружности $(A_0, |AA_0|)$. Острие иголки циркуля стает в точку E. Если теперь провести окружность $(E, |AE|)$, то в пересечении с окружностью $(A_0, |AA_0|)$ получим точку C. Точно так же можно построить точку C'. Введем эту *дополнительную операцию* в теорию геометрических построений одним циркулем.

Следовательно, можно построить отрезок, в 3^n раз больший данного (задача 11), так, что все окружности пройдут через одну и ту же точку.

Решение задач 15, 16, 17 проведены так, что все окружности проходят через одну и ту же точку O — центр инверсии (см. рис. 26, 28, 29). Чтобы при построении точки X, *инверсной* точке C в случае $|OC| \leqslant \frac{r}{2}$ (задача 15), проведенные окружности также все без исключения проходили через одну точку O, необходимо вместо отрезка $|OC_1| = n|OC| > \frac{r}{2}$ (рис. 27) строить отрезок $|OC_1| = 3^n|OC| > \frac{r}{2}$ (задача 11 с учетом тех замечаний, которые сделаны в начале этого параграфа) и строить $|OX| = 3^n|OC_1'|$.

Итак, с помощью одного циркуля можно построить точку, инверсную данной точке; построить окружность, проходящую через центр инверсии, инверсную данной прямой; и, наконец, построить прямую (две ее точки), инверсную окружности, проходящей через центр инверсии O, проводя в каждом из этих построений только окружности, проходящие через одну и ту же точку O — центр инверсии.

* * *

Как уже было отмечено во «Введении», Я. Штейнер показал, что все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, могут быть точно решены и одной лишь линейкой, если в плоскости чертежа даны постоянная (вспомогательная) окружность (O_1, R) и ее центр.

Предположим теперь, что некоторая задача на построение решена методом Штейнера; в результате в

плоскости чертежа будет получена фигура Φ, состоящая, кроме вспомогательной окружности, только из прямых линий. Возьмем произвольную окружность (O, r) с единственным условием, что центр O не лежит на окружности (O_1, R) и не лежит ни на одной из прямых фигуры Φ, и примем ее за окружность инверсии. Строим фигуру Φ', инверсную фигуре Φ. Полученная фигура Φ' будет состоять только из окружностей, из которых, за исключением двух (окружности инверсии (O, r) и окружности, которая инверсна окружности Штейнера (O_1, R)), все будут проходить через одну точку O — центр инверсии.

Если окружность инверсии (O, r) пересекает вспомогательную окружность (O_1, R) под прямым углом, то в силу теоремы 1 окружность Штейнера (O_1, R) сама себе инверсна (т. е. одновременно принадлежит Φ и Φ'). Фигура Φ состоит из прямых линий и окружности Штейнера; ей инверсная фигура Φ' будет состоять из окружности Штейнера, окружностей, проходящих через центр инверсии и, быть может, отдельных изолированных точек (центров этих окружностей). Для построения фигуры Φ' придется использовать только задачи 15 и 16.

Таким образом, при построении фигуры Φ', инверсной фигуре Φ, в этом случае (когда окружности инверсии и Штейнера ортогональны) все окружности, в том числе и окружности, с помощью которых производится построение фигуры Φ', будут проходить через одну и ту же точку O, исключение при этом составляют только две окружности: окружность инверсии (O, r) и вспомогательная окружность Штейнера (O_1, R).

Подчеркнем, что построение фигуры Φ' следует производить в том порядке, в котором мы мысленно производим построение фигуры Φ методом Штейнера.

Для иллюстрации решим следующую задачу.

Задача 36. Даны прямая AO_1 и точка C вне нее. Провести через точку C прямую, перпендикулярную прямой AO_1, и определить точку их пересечения.

Построение. Пусть (O_1, R) — окружность Штейнера, где $R = |O_1A|$. Построение фигуры Φ методом Штейнера будет выполнено в три этапа. 1) Проводим прямую AO_1, и пусть B — точка ее пересечения с окружностью (O_1, R). 2) Проводим прямые AC и BC и обозначим точки E и D их пересечения с окружностью Штейнера. 3) Если теперь провести прямые AD и BE, то в пересечении получим точку F. Прямая CF перпен-

дикулярна данной прямой AO_1. Пусть H — точка пересечения прямых AB и CF (рис. 45).

Доказательство. Отрезки CD и EF являются высотами треугольника ACF, так как углы ADB и AEB прямые (они вписаны в окружность (O_1, R) и опираются на диаметр AB), следовательно, $(FC) \perp (AO_1)$, ибо высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Фигура **Ф** в этой задаче состоит из окружности Штейнера (O_1, R) и шести прямых AO_1, AC, AD, CD, CF и EF. В начале построения фигура состоит из окружности Штейнера, прямой AO_1 и точки C.

Рассмотрим теперь решение задачи 36 одним только циркулем, с условием, что все проведенные в построении окружности, за исключением двух, будут проходить через одну точку.

Построение. Определим сначала окружность (O, r) так, чтобы она была ортогональной к окружности Штейнера (O_1, R), где $R = |O_1A|$. Для этого берем на окружности (O_1, R) две произвольные точки K и M и строим $(KO) \perp [KO_1]$ (задача 8, второй способ), для чего проводим окружности $(M, |KM|)$ и $(K, |KP|)$, которые пересекутся в точке O. Точку P получим в пересечении окружностей $(M, |KM|)$ и (O_1, R) (см. рис. 45).

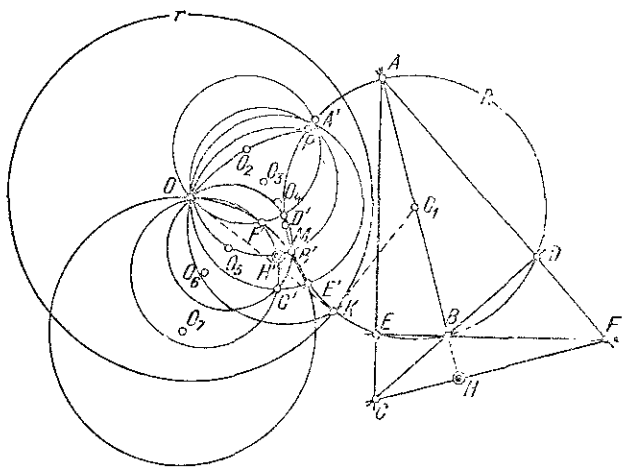

Рис. 45.

Изменяя, если нужно, положение точек K и M, можно найти точку O, не лежащую ни на одной из прямых фигуры **Ф**. Окружность $(O, |OK|)$ ортогональна окруж-

ности Штейнера (O_1, R). Поэтому, если окружность (O, r), где $r = |OK|$, принять за окружность инверсии, то окружность Штейнера (O_1, R) будет сама себе инверсна.

Фигура Φ', инверсная фигуре Φ, состоит из семи окружностей $(O_2, |OO_2|)$, $(O_3, |OO_3|)$, $(O_4, |OO_4|)$, $(O_5, |OO_5|)$, $(O_6, |OO_6|)$, $(O_7, |OO_7|)$ и (O_1, R) *). (Окружность Штейнера (O_1, R) сама себе инверсна, поэтому принадлежит фигурам Φ и Φ' одновременно.) Первые шесть окружностей проходят через центр инверсии O и являются инверсными соответственно прямым AF, AO_1, AC, CD, CF и EF фигуры Φ. Точки A', B', C', D', E', F' и H' фигуры Φ' инверсны соответственно точкам A, B, C, D, E, F и H фигуры Φ. Все окружности, которые были проведены для построения первых шести окружностей фигуры Φ', а также окружности $(M, |KM|)$, $(K, |KP|)$, проведенные для определения центра инверсии O, будут проходить через одну и ту же точку O плоскости.

В начале построения фигура Φ содержит заданную точку C и прямую AO_1, присоединяем к ней еще окружность Штейнера (O_1, R). Чтобы построить остальные прямые фигуры Φ, пользуясь одним только циркулем, т. е. построить точки B, E, D и искомые точки F и H, строим фигуру Φ', повторяя фактически три этапа построения Штейнера.

1) Строим окружность $(O_3, |OO_3|)$, инверсную прямой AO_1 (задача 16), которая пересечет окружность Штейнера (O_1, R) в точках A' и B' (точка A' инверсна точке A). Находим точку B, инверсную точке B' (задача 15). Точка B является точкой пересечения прямой AO_1 и окружности (O_1, R) (см. рис. 45).

2) Строим окружности $(O_4, |OO_4|)$ и $(O_5, |OO_5|)$, инверсные прямым AC и BC. Пусть эти окружности пересекают окружность Штейнера соответственно в точках A' и E', B' и D'. Строим точки E и D, инверсные точкам E' и D'.

3) Наконец, строим окружности $(O_2, |OO_2|)$ и $(O_7, |OO_7|)$, инверсные прямым AD и BE, точку пересечения которых обозначим через F'. Находим точку F, инверсную точке F'. Прямая CF — искомая. Пусть те-

---

*) Центры этих окружностей O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_7 и O_1 можно рассматривать как отдельные изолированные точки фигуры Φ'.

перь окружность $(O_6, |OO_6|)$, инверсная прямой CF, пересекает окружность $(O_3, |OO_3|)$ в точке H'. Точка H, инверсная точке H', искомая, т. е.

$$H = (CF) \cap (AO_1).$$

На основании вышеизложенного можем сформулировать:

Теорема II. *Каждую геометрическую задачу на построение, разрешимую циркулем и линейкой, можно решить одним циркулем так, что все окружности построения, за исключением двух (окружности инверсии и вспомогательной окружности Штейнера), будут проходить через одну и ту же точку — центр инверсии.*

* * *

Пусть теперь некоторая задача на построение решена методом Штейнера. В результате получим фигуру Φ, состоящую из окружности (O_1, R) и прямых линий, часть из которых проходит через центр O_1 вспомогательной окружности. Если за окружность инверсии принять окружность Штейнера (O_1, R) и построить фигуру Φ', инверсную фигуре Φ, то построенная фигура Φ' будет состоять из *прямых линий* и *окружностей*, причем все эти прямые и окружности, за исключением окружности (O_1, R), будут проходить через одну и ту же наперед заданную точку O_1 *).

Отсюда следует

Теорема III. *Каждую геометрическую задачу на построение всегда можно решить циркулем и линейкой так, что все прямые и окружности, за исключением одной (окружности инверсии, которая здесь является одновременно и вспомогательной окружностью Штейнера), бу-*

---

*) А. Адлер в [1] утверждает (см. § 20), что если вспомогательную окружность Штейнера (O_1, R) принять за окружность инверсии, то: «Не только возможно, как показал еще Маскерони, решить все геометрические конструктивные задачи второй степени при исключительном пользовании циркулем, но можно даже поставить еще условие, чтобы все входящие в построение окружности, за исключением одной из них, проходили через одну и ту же произвольно выбранную точку».

Ошибочность этого утверждения следует из того, что все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, невозможно решить одной линейкой, если центр вспомогательной окружности O_1 неизвестен, т. е. если через центр O_1 не проводить прямых линий (которые сами себе инверсны (см. теорему 11 из § 3) и, следовательно, будут принадлежать фигуре Φ').

дут проходить через одну и ту же наперед заданную точку — центр инверсии.

* * *

Допустим теперь, что при решении геометрических задач на построение одним циркулем допускается однократное употребление линейки (или положим, что в плоскости чертежа с помощью линейки проведена прямая линия AB). Возьмем произвольную окружность (O, r) с центром O, не лежащим на прямой AB, за окружность инверсии и построим окружность (O_1, R), инверсную данной прямой (задача 16). Окружность (O_1, R) проходит через центр инверсии O и $R = |OO_1|$.

Решение любой задачи на построение методом Штейнера с вспомогательной окружностью (O_1, R) даст фигуру Φ, состоящую только из прямых линий и окружности (O_1, R). Инверсная ей фигура Φ', кроме прямой AB, будет состоять из одних окружностей, проходящих через центр инверсии O. При этом мы предполагаем, что ни одна из прямых при решении методом Штейнера не прошла через точку O, лежащую на вспомогательной окружности (O_1, R); в противном случае за окружность инверсии (O, r) следует взять другую окружность.

Если прямая линия AB не начерчена, а допускается однократное употребление линейки, то в плоскости чертежа берем произвольную окружность (O_1, R) в качестве вспомогательной и решаем предложенную задачу методом Штейнера. Затем берем на этой окружности точку O с условием, чтобы она не лежала ни на одной из прямых фигуры Φ. Радиусом $r < 2R$ описываем окружность (O, r) и обозначим через A и B точки ее пересечения с окружностью (O_1, R). Берем линейку и проводим прямую AB, которая будет инверсна окружности (O_1, R), если считать (O, r) окружностью инверсии. Дальше строим фигуру Φ', инверсную начерченной фигуре Φ.

Теорема IV. *Если в плоскости чертежа начерчена прямая линия, то все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, могут быть решены и одним циркулем так, что все окружности этого построения, за исключением одной (окружности инверсии), будут проходить через одну и ту же точку плоскости.*

Эта теорема имеет некоторую аналогию с основной теоремой Штейнера для построения одной линейкой с постоянной окружностью.

* * *

Пусть теперь в плоскости чертежа начерчена с помощью линейки некоторая фигура Ψ, состоящая из прямых линий и отрезков (например, две параллельные прямые или параллелограмм и т. д.).

Предположим теперь, что какую-нибудь задачу на построение мы решили методом Штейнера, приняв фигуру Ψ в качестве вспомогательной. В результате получим некоторую фигуру Φ, состоящую только из прямых линий. Фигура Ψ является подмножеством фигуры Φ.

Возьмем произвольную окружность (O, r) при условии, что центр O не лежит ни на одной из прямых фигуры Φ, за окружность инверсии и построим фигуру Φ', инверсную фигуре Φ. Фигура Φ' будет состоять только из окружностей, проходящих через одну точку O — центр инверсии.

Теорема V. *Если в плоскости задана (начерчена) некоторая фигура, состоящая из прямых линий и отрезков, то все задачи на построение, которые можно решить методом Штейнера, принимая эту фигуру в качестве вспомогательной, всегда можно решить одним циркулем так, что все окружности, за исключением одной (окружности инверсии), будут проходить через одну и ту же точку, произвольно взятую в плоскости чертежа.*

* * *

В начале параграфа мы ввели *дополнительную операцию,* с помощью которой решение задачи 15 всегда можно выполнить так, что все проведенные при этом окружности, за исключением одной (окружности инверсии (O, r)), будут проходить через одну и ту же наперед заданную точку O — центр инверсии.

Если же этой дополнительной операции не вводить, то для построения точек E и E', E_1 и E'_1, E_2 и E'_2 и т. д. в задаче 11, которая используется в задаче 15, потребуется чертить окружности $(A, |AA_i|)$, где $i=1, 2, \ldots$ В этом случае в теореме II фразу: «за исключением двух (окружности инверсии и вспомогательной окружности Штейнера)» следует заменить фразой: «за исключением вспомогательной окружности Штейнера (O_1, R), окружности инверсии (O, r) и, быть может, еще нескольких концентрических окружностей (O, r_i), $i=1, 2, \ldots$».

В теоремах III, IV и V фразу «за исключением одной (окружности инверсии)» следует заменить фразой: «за

исключением окружности инверсии (O, r) и, быть может, еще нескольких концентрических окружностей (O, r_i), $i=1, 2, \ldots$».

Например, теорема III будет формулироваться так:

Теорема III′. *Каждую геометрическую задачу на построение всегда можно решить циркулем и линейкой так, что все прямые и окружности будут проходить через одну и ту же наперед заданную точку O, за исключением окружности инверсии (O, r) и, быть может, еще нескольких концентрических окружностей (O, r_i), $i=1, 2, \ldots$, описанных из полюса инверсии O, как из центра.*

Таким образом, все окружности построения можно разделить на две группы: окружности первой группы будут проходить через одну и ту же точку O, а окружности второй группы (одна или более) будут проведены из этой же точки O, как из центра. Среди этих концентрических окружностей всегда будет находиться окружность инверсии (O, r).

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение

СИМВОЛЫ И ОБОЗНАЧЕНИЯ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

Ниже приводится перечень символов школьного курса математики, которые используются в настоящей работе.

$\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел.

Φ, Ψ — геометрические фигуры.

(AB) — прямая, проходящая через точки A и B.

$[AB]$ — отрезок с концами A и B.

$[AB)$ — луч AB

$\parallel$ — знак параллельности.

$\perp$ — знак перпендикулярности.

$(AB) \parallel (CD)$ — прямая AB параллельна прямой CD.

$[AB] \perp [CD]$ — отрезок AB перпендикулярен к отрезку CD.

$\measuredangle$ — знак угла. $\measuredangle ABC$ — угол ABC.

$\overset{\frown}{\ }$ — знак величины угла. $\overset{\frown}{ABC} = 60°$.

$\smile$ — знак дуги. $\smile AB$ — дуга AB.

$\overset{\smile}{\ }$ — знак угловой величины дуги. $\overset{\smile}{CD} = 90°$.

$\triangle$ — знак треугольника.

$\sim$ — знак подобия. $\triangle ABC \sim \triangle CDE$.

$\cong$ — знак конгруэнтности. $\triangle ABC \cong \triangle CDE$.

$\in$ — знак принадлежности. $A \in (CD)$ — точка A принадлежит (CD).

$\subset$ — знак включения. $[AB] \subset \Phi$ — отрезок AB принадлежит фигуре Φ.

$\cup$ — знак объединения.

$\cap$ — знак пересечения. $E = (AB) \cap (CD)$ — прямые пересекаются в точке E.

$\varnothing$ — пустое множество. $M = \varnothing$ — множество M пусто.

$A(x)$ — точка с координатой x.

$M = \{a; b; c\}$ — множество M, состоящее из элементов a, b и c.

(O, r) — окружность или круг с центром O и радиусом r.

$\overrightarrow{AB}$ — вектор AB.

$\uparrow\uparrow$ — знак сонаправленности векторов. $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ — векторы лежат на параллельных прямых и в одну сторону направлены.

$\uparrow\downarrow$ — знак противоположной направленности векторов.

$S_{(AB)}(C)$ — точка, симметричная точке C относительно прямой AB.

H^k_O — гомотетия (подобие) с центром O и коэффициентом k.

С другими символами, которые используются в школьном курсе математики, читатель может ознакомиться по работе [14].

Приложение II

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 18

Доказательство решения задачи 18 проведено для случая, когда центр инверсии O лежит вне заданной окружности (O_1, R). Здесь мы приводим доказательство, которое не связано с проведением касательной OP, и справедливо в общем случае.

Доказательство. Введем координатную прямую: O (центр инверсии) — начало координат; ось абсцисс проходит через

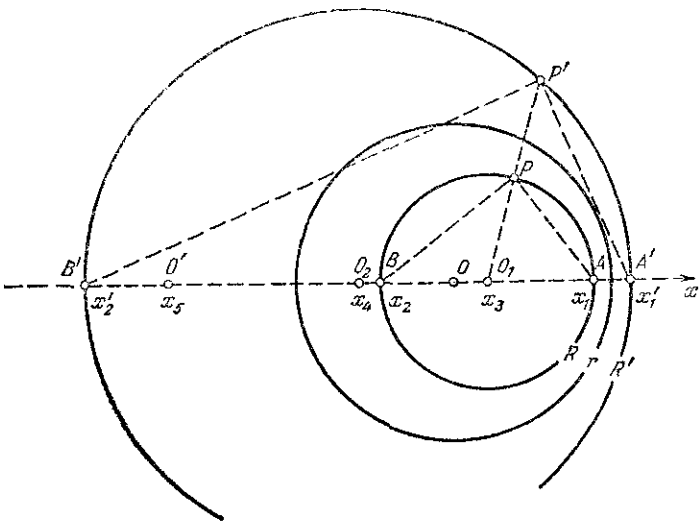

Рис. 46.

центр O_1 заданной окружности. Обозначим координаты точек оси: $A(x_1)$, $A'(x'_1)$, $B(x_2)$, $B'(x'_2)$, $O_1(x_3)$, $O_2(x_4)$, $O'(x_5)$ (см. рис. 25, 30, 46).

Тогда

$$R = \frac{|x_2 - x_1|}{2}, \qquad R' = \frac{|x'_2 - x'_1|}{2}, \tag{1}$$

$$|x_3| = \frac{|x_1 + x_2|}{2}, \quad |x_4| = \frac{|x'_1 + x_2|}{2}, \tag{2}$$

$$|x_1| \cdot |x'_1| = |x_2| \cdot |x'_2| = r^2. \tag{3}$$

Пусть точка O' инверсна точке O_2 (центру искомой окружности, инверсной заданной), т. е.

$$|x_4| \cdot |x_5| = r^2. \tag{4}$$

Необходимо доказать, что

$$|x_3| \cdot |x_5 - x_3| = R^2, \tag{5}$$

т. е. что точка O' инверсна точке O, если окружность (O_1, R) принять в качестве окружности инверсии.

Действительно, из равенств (1)—(4) получим

$$|x_3| \cdot |x_5 - x_3| = \frac{1}{2} |x_1 + x_2| \cdot \left| \frac{1}{2} |x_1 + x_2| - \frac{r^2}{|x_5|} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} |x_1 + x_2| \cdot \left| \frac{|x_1 + x_2|}{2} - \frac{2r^2}{|x_1' + x_2'|} \right| =$$

$$= \frac{|x_1 + x_2|}{2} \cdot \left| \frac{|x_1 + x_2|}{2} - \frac{2r^2}{\left| \frac{r^2}{x_1} + \frac{r^2}{x_2} \right|} \right| =$$

$$= \frac{|x_1 + x_2|}{2} \cdot \left| \frac{|x_1 + x_2|^2 - 4|x_1| \cdot |x_2|}{2|x_1 + x_2|} \right| =$$

$$= \frac{1}{4} \left| |x_1 + x_2|^2 - 4|x_1| \cdot |x_2| \right| = \frac{1}{4} |x_2 - x_1|^2 = R^2.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адлер А. Теория геометрических построений. — Л.: Учпедгиз, 1940.
2. Александров И. И. Сборник геометрических задач на построение. — М.: Учпедгиз, 1950.
3. Аргунов Б. И., Бланк М. Б. Геометрические построения на плоскости. — М.: Учпедгиз, 1957.
4. Воронец А. М. Геометрия циркуля. — М.: Гостехиздат, 1934.
5. Зетель С. И. *Геометрия линейки и геометрия циркуля.* — М.: Учпедгиз, 1950.
6. Костовский А. Н. О возможности решения задач на построение одним циркулем с ограниченным раствором ножек. — *Наукові записки, Изд-во Львовск. ун-та,* 1954, 24.
7. Костовский А. Н. Розв'язування геометричних задач на побудову одним циркулем з обмеженним розхилом. — Питання механіки і математики, Изд-во Львовск. ун-та, 1957, 44.
8. Кутузов Б. И. Геометрия. — М.: *Учпедгиз,* 1955.
9. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика. — М.: ОГИЗ, 1947.
10. Mascheroni L. La geometria del compasso. — Павия, 1797.
11. *Методика розв'язання задач на побудову в середній школі* / під ред. проф. Астряба Е. Я. і проф. Смогоржевського С. О. — Київ: Радянська школа, 1940.
12. Тесленко И. Ф. Метод інверсії та його застосування. — Київ: Радянська школа, 1954.
13. Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. — М.: Наука, 1966.
14. Антипов И. Н., Шварцбурд Л. С. Символы, обозначения, понятия школьного курса математики. — М.: Просвещение, 1978.

Александр Никитович Костовский

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ ОДНИМ ЦИРКУЛЕМ

(Серия: «Популярные лекции по математике»)

Редактор *Ф. И. Кизнер.*

Технический редактор *С. Я. Шкляр.*

Корректор *И. Я. Кришталь.*

ИБ № 12351

Сдано в набор 07.04.83. *Подписано к печати* 28.11.83. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага тип № 3 Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 4,2. Усл. кр.-отт. 4,41. Уч.-изд. л. 4,12. Тираж 150 000 экз. Заказ № 150. Цена 10 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Московская типография № 13 ПО «Периодика» ВО «Союзполиграфпром» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли 107005, Москва, Б-5, Денисовский пер., д. 30.

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вып. 1. **А. И. Маркушевич.** Возвратные последовательности.

Вып. 2. **И. П. Натансон.** Простейшие задачи на максимум и минимум.

Вып. 3. **И. С. Соминский.** Метод математической индукции.

Вып. 4. **А. И. Маркушевич.** Замечательные кривые.

Вып. 5. **П. П. Коровкин.** Неравенства.

Вып. 6. **Н. Н. Воробьев.** Числа Фибоначчи.

Вып. 7. **А. Г. Курош.** Алгебраические уравнения произвольных степеней.

Вып. 8. **А. О. Гельфонд.** Решение уравнений в целых числах.

Вып. 9. **А. И. Маркушевич.** Площади и логарифмы

Вып. 10. **А. С. Смогоржевский.** Метод координат.

Вып. 11. **Я. С. Дубнов.** Ошибки в геометрических доказательствах.

Вып. 12. **И. П. Натансон.** Суммирование бесконечно малых величин.

Вып. 13. **А. И. Маркушевич.** Комплексные числа и конформные отображения.

Вып. 14. **А. И. Фетисов.** О доказательствах в геометрии

Вып. 15. **А. И. Фетисов.** О доказательствах в геометрии.

Вып. 15. **И. Р. Шафаревич.** О решении уравнений высших степеней.

Вып. 16. **В. Г. Шерватов.** Гиперболические функции.

Вып. 17. **В. Г. Болтянский.** Что такое дифференцирование?

Вып. 18. **Г. М. Миракьян.** Прямой круговой цилиндр.

Вып. 19. **Л. А. Люстерник.** Кратчайшие линии.

Вып. 20. **А. М. Лопшиц.** Вычисление площадей ориентированных фигур.

Вып. 21. **Л. И. Головина** и **И. М. Яглом.** Индукция в геометрии.

Вып. 22. **В. Г. Болтянский.** Равновеликие и равносоставленные фигуры.

Вып. 23. **А. С. Смогоржевский.** О геометрии Лобачевского.

Вып. 24. **Б. И. Аргунов** и **Л. А. Скорняков.** Конфигурационные теоремы.

Вып. 25. **А. С. Смогоржевский.** Линейка в геометрических построениях.

Вып. 26. **Б. А. Трахтенброт.** Алгоритмы и машинное решение задач.

Вып. 27. **В. А. Успенский.** Некоторые приложения механики к математике.

Вып. 28. **Н. А. Архангельский** и **Б. И. Зайцев.** Автоматические цифровые машины.

Вып. 29. **А. Н. Костовский.** Геометрические построения одним циркулем

Вып. 30. **Г. Е. Шилов.** Как строить графики.

Вып. 31. **А. Г. Дорфман.** Оптика конических сечений.

Вып. 32. **Е. С. Вентцель.** Элементы теории игр.

Вып. 33. **А. С. Барсов.** Что такое линейное программирование.

Вып. 34. **Б. Е. Маргулис.** Системы линейных уравнений.

Вып. 35. **Н. Я. Виленкин.** Метод последовательных приближений.

Вып. 36. **В. Г. Болтянский.** Огибающая.

Вып. 37. **Г. Е. Шилов.** Простая гамма (устройство музыкальной шкалы).

Вып. 38. **Ю. А. Шрейдер.** Что такое расстояние?

Вып. 39. **Н. Н. Воробьев.** Признаки делимости.

Вып. 40. **С. В. Фомин.** Системы счисления.

Вып. 41. **Б. Ю. Коган.** Приложение механики к геометрии.

Вып. 42. **Ю. И. Любич и Л. А. Шор.** Кинематический метод в геометрических задачах.
Вып. 43. **В. А. Успенский.** Треугольник Паскаля.
Вып. 44. **И. Я. Бакельман.** Инверсия.
Вып. 45. **И. М. Яглом.** Необыкновенная алгебра.
Вып. 46. **И. М. Соболь.** Метод Монте-Карло.
Вып. 47. **Л. А. Калужнин.** Основная теорема арифметики.
Вып. 48. **А. С. Солодовников.** Системы линейных неравенств.
Вып. 49. **Г. Е. Шилов.** Математический анализ в области рациональных функций.
Вып. 50. **В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг.** Разбиение фигур на меньшие части.
Вып. 51. **Н. М. Бескин.** Изображения пространственных фигур.
Вып. 52. **Н. М. Бескин.** Деление отрезка в данном отношении.
Вып. 53. **Б. А. Розенфельд и Н. Д. Сергеева.** Стереографическая проекция.
Вып. 54. **В. А. Успенский.** Машина Поста.
Вып. 55. **Л. Беран.** Упорядоченные множества.
Вып. 56. **С. А. Абрамов.** Элементы программирования.
Вып. 57. **В. А. Успенский.** Теорема Гёделя о неполноте.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71,
Ленинский проспект, 15

ВЫХОДИТ ИЗ ПЕЧАТИ:

Шашкин Ю. А. Эйлерова характеристика.

В брошюре определяется эйлерова характеристика как целочисленная аддитивная функция множества, заданная на классе, состоящем из компактных выпуклых множеств плоскости (а также пространства или сферы) и конечных объединений таких множеств. Она позволяет решать разнообразные геометрические задачи, связанные, в частности, с разбиениями и покрытиями плоскости или пространства.

Для школьников старших классов и студентов младших курсов вузов.